Übungsblatt 1 - Musterlösung

Technische Hochschule Mittelhessen, FB MNI, Lineare Algebra für Informatiker, Prof. Dr. B. Just

Aufgabe 1

Es seien a, b, c, d reelle Zahlen. Bitte berechnen Sie:

a. $(2, 5, 4, 7, 8) + (-2, 1, 8, 4, 3) =$

b. $(a, b, c, d) + (a, c, b, d) =$

c. $(a, b, c, d) - (a, c, b, d) =$

d. $(a, b, c, d) - 2 \cdot (a, c, b, d) =$

e. $2 \cdot (a, b, c) - b \cdot (1, 2, 3) =$

Lösung Aufgabe 1

a.) $(2, 5, 4, 7, 8) + (-2, 1, 8, 4, 3) = (0, 6, 12, 11, 11)$

b.) $(a, b, c, d) + (a, c, b, d) = (2a, b + c, c + b, 2d)$

c.) $(a, b, c, d) - (a, c, b, d) = (0, b - c, c - b, 0)$

d.) $(a, b, c, d) - 2 \cdot (a, c, b, d) = (a, b, c, d) - (2a, 2c, 2b, 2d) = (-a\ ,\ b - 2c\ ,\ c - 2b\ ,\ -d)$

e.) $2 \cdot (a, b, c) - b \cdot (1, 2, 3) = (2a - b\ ,\ 2b - 2b\ ,\ 2c - 3b) = (2a - b\ ,\ 0\ ,\ 2c - 3b)$

Aufgabe 2

Bitte beweisen Sie (ist wirklich so leicht):

Jeder Vektor $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ kann als Summe von Vielfachen der Standard-Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^n$ dargestellt werden.

Lösung Aufgabe 2

Beweis:

$(x_1, \ldots, x_n) = x_i \cdot e_i + \ldots + x_n \cdot e_n$.

Als Spalten geschrieben:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_i \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{q.e.d.}$$

Aufgabe 3

a.) Bitte finden Sie für die unten stehenden Rechenregeln für die Vektoraddition und die Skalare Multiplikation jeweils ein Beispiel.

b.) Bitte beweisen Sie die Rechenregeln.

Hinweis: Gleichheit von zwei Vektoren wird gezeigt, indem man zeigt:

1. Beide haben dieselbe Anzahl n von Komponenten
2. Für alle $i = 1, ..., n$ stimmt die i-te Komponente der beiden Vektoren überein.

Rechenregeln für Vektoren - Vektoraddition und Skalare Multiplikation

Seien $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, dann gilt:

i.) $(x+y)+z = x+(y+z)$ (Assoziativität Addition)

ii.) $x + (0, ..., 0) = x$ (Neutrales Element Addition)

iii.) $x + (-1 \cdot x) = (0, ..., 0)$ (Inverse Elemente Addition)

iv.) $x + y = y + x$ (Kommutativität Addition)

v.) $\lambda(x+y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$ (Distributivität Skalarmultiplikation und Addition)

vi.) $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$ (andere Distributivität Skalarmultiplikation und Addition)

vii.) $(\lambda \cdot \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$ (Assoziativität Skalarmultiplikation)

viii.) $1 \cdot x = x$ (Neutrales Element Skalarmultiplikation)

Lösung Aufgabe 3

a.) Hier gibt es logischerweise keine Musterlösung. Fragen Sie aber gerne in der Übungsgruppe nach, wenn etwas nicht klappte :-).

b.)

i.) Auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens stehen Vektoren mit n Komponenten.
Betrachte die i-te Komponente, $i = 1, \dots, n$, von $(x+y)+z$. Diese ist die i-te Komponente von $((x_1+y_1)+z_1, \dots, (x_i+y_i)+z_i, \dots, (x_n+y_n)+z_n)$, also $(x_i+y_i)+z_i \in \mathbb{R}$.
In $\mathbb{R}$ gilt: $(x_i+y_i)+z_i = x_i+(y_i+z_i)$, also ist die i-te Komponente von
$(x+y)+z$ und von $x+(y+z)$ gleich.
Da das für alle Komponenten gilt, sind die Vektoren$(x+y)+z$ und $x+(y+z)$ gleich.

ii.) Auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens stehen Vektoren mit n Komponenten.
Betrachte die i-te Komponente, $i = 1, \dots, n$, von $x + (0, \dots, 0)$. Diese ist die i-te Komponente von $(x_1+0, \dots, x_i+0, \dots, x_n+0)$, also $x_i + 0 \in \mathbb{R}$.
In $\mathbb{R}$ gilt: $x_i + 0 = x_i$, also ist die i-te Komponente von x +(0,. . . ,0) und von x gleich.
Da das für alle Komponenten gilt, sind die Vektoren $x + (0, \dots, 0)$ und x gleich.

iii.) $x + (-1 \cdot x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_1 \\ \vdots \\ x_n - x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ da $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$
In $\mathbb{R}$ gilt: $x_i + (-1 \cdot x_i) = 0$

iv.) $x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + x_1 \\ \vdots \\ y_n + x_n \end{pmatrix} = y + x$ da $x_1, \dots, x_n$ und $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$
In $\mathbb{R}$ gilt: $x_i + y_i = y_i + x_i$

v.) $\lambda \cdot (x+y) = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot (x_1 + y_1) \\ \vdots \\ \lambda \cdot (x_n + y_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 + \lambda \cdot y_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n + \lambda \cdot y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda \cdot y_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot y_n \end{pmatrix}$
$= \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$ da $\lambda, x_1, \dots, x_n$ und $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$
In $\mathbb{R}$ gilt : $\lambda \cdot (x_i + y_i) = \lambda \cdot x_i + \lambda \cdot y_i$

vi.) $(\lambda + \mu) \cdot x = \begin{pmatrix} (\lambda + \mu) \cdot x_1 \\ \vdots \\ (\lambda + \mu) \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 + \mu \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n + \mu \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu \cdot x_1 \\ \vdots \\ \mu \cdot x_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
da λ, μ und $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$
In $\mathbb{R}$ gilt : $(\lambda + \mu) \cdot x_i = \lambda \cdot x_i + \mu \cdot x_i$

vii.) $(\lambda \cdot \mu) \cdot x = \begin{pmatrix} (\lambda \cdot \mu) \cdot x_1 \\ \vdots \\ (\lambda \cdot \mu) \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mu \cdot x_1) \cdot \lambda \\ \vdots \\ (\mu \cdot x_n) \cdot \lambda \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} \mu \cdot x_1 \\ \vdots \\ \mu \cdot x_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$ da λ, μ und $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$

In $\mathbb{R}$ gilt : $(\lambda \cdot \mu) \cdot x_i = \lambda \cdot (\mu \cdot x_i)$

viii.) Auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens stehen Vektoren mit n Komponenten.

Betrachte die i-te Komponente, $i = 1, \ldots, n$, von $1 \cdot x$. Diese ist die i-te Komponente von $(1 \cdot x_1, \ldots, 1 \cdot x_i, \ldots, 1 \cdot x_n)$, also $1 \cdot x_i \in \mathbb{R}$.
In $\mathbb{R}$ gilt: $1 \cdot x_i = x_i$, also ist die i-te Komponente von $1 \cdot x$ und von x gleich.
Da das für alle Komponenten gilt, sind die Vektoren $1 \cdot x$ und x gleich.