Übungsblatt 2 - Musterlösung

Technische Hochschule Mittelhessen, FB MNI, Lineare Algebra für Informatiker, Prof. Dr. B. Just

Aufgabe 1

a. $(1, 3, 4, 7, 5) \cdot (2, 4, -3, -2, -1) =$

b. $(a, -b, c, -d) \cdot (-c, -b, a, \frac{1}{d}) =$

c. $|(4, 3, 2, -1, -5)| =$

d. Bitte denken Sie sich selbst Rechenaufgaben mit Skalarprodukt und Norm aus, auch mit Variablen, bis es Ihnen langweilig wird :).

Lösung Aufgabe 1

a.) $(1, 3, 4, 7, 5) \cdot (2, 4, -3, -2, -1) = (1 \cdot 2) + (3 \cdot 4) + (4 \cdot (-3)) + (7 \cdot (-2)) + (5 \cdot (-1)) = -17$

b.) $(a, -b, c, -d) \cdot (-c, -b, a, \frac{1}{d}) = -ac + b^2 + ac - 1 = b^2 - 1$

c.) $|(4, 3, 2, -1, -5)| = \sqrt{4^2 + 3^2 + 2^2 + (-1)^2 + (-5)^2} = \sqrt{55} \approx 7,416$

d.) Hier gibt es keine Musterlösung :).

Aufgabe 2

Bitte beweisen Sie die folgenden Rechenregeln für das Skalarprodukt:

Seien $x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n),\ z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Dann gilt:

i.) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

ii.) $(\lambda \cdot x) \cdot (\mu \cdot y) = \lambda \cdot \mu \cdot (x \cdot y)$

iii.) $0 \cdot x = 0$

iv.) $x \cdot y = y \cdot x$

Wenn Sie keine Idee haben, überlegen Sie sich zunächst Zahlenbeispiele :-).

Lösung Aufgabe 2

<u>Beweise:</u>

i.) $x \cdot (y + z)$
$= x_1 \cdot (y_1 + z_1) + \ldots + x_n \cdot (y_n + z_n)$
$= x_1 \cdot y_1 + x_1 \cdot z_1 + \ldots + x_n \cdot y_n + x_n \cdot z_n$
$= x_1 \cdot y_1 + \ldots + x_n \cdot y_n + x_1 \cdot z_1 + \ldots + x_n \cdot z_n$ (durch umsortieren)
$= x \cdot y + x \cdot z$

ii.) $(\lambda \cdot x) \cdot (\mu \cdot y)$
$= \lambda \cdot x_1 \cdot \mu \cdot y_1 + \ldots + \lambda \cdot x_n \cdot \mu \cdot y_n$
$= \sum_{i=1}^{n} \lambda \cdot x_i \cdot \mu \cdot y_i$
$= \lambda \cdot \mu \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$
$= \lambda \cdot \mu \cdot (x_1 \cdot y_1 + \ldots + x_n \cdot y_n)$
$= \lambda \cdot \mu \cdot (x \cdot y)$

iii.) $(0, \ldots, 0) \cdot x = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \cdot x_1 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0$

iv.) $x \cdot y$
$= x_1 \cdot y_1 + \ldots + x_n \cdot y_n$
$= y_1 \cdot x_1 + \ldots + y_n \cdot x_n$ da $x_i \cdot y_i = y_i \cdot x_i \in \mathbb{R}$ (Kommutativgesetz)
$= y \cdot x$

Aufgabe 3

Gesucht ist ein Vielfaches des Vektors $x = (3, 1, 4, 5, 1, 8, 2, 1)$, das die Norm 1 hat.
(Ein Einheitsvektor in Richtung x.)

Lösung Aufgabe 3

Wir benutzen die Tatsache, dass für jeden Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ gilt: $|\frac{x}{|x|}| = 1$. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} x &= (3, 1, 4, 5, 1, 8, 2, 1) \\ |x| &= \sqrt{3^2 + 1^2 + 4^2 + 5^2 + 1^2 + 8^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{121} = 11 \\ \text{Der gesuchte Vektor ist } \frac{1}{11} \cdot x &= \left(\frac{3}{11}, \frac{1}{11}, \frac{4}{11}, \frac{5}{11}, \frac{1}{11}, \frac{8}{11}, \frac{2}{11}, \frac{1}{11}\right) \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Es seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Bitte rechnen Sie nach, indem Sie die Definition von Norm und Skalarprodukt einsetzen: $|x + y|^2 = |x|^2 + 2 \cdot x \cdot y + |y|^2$

Leichtere Alternative:

Es seien $x, y \in \mathbb{R}^7$. Bitte rechnen Sie nach: $|x + y|^2 = |x|^2 + 2 \cdot x \cdot y + |y|^2$

Lösung Aufgabe 4

Nach Definition von Skalarprodukt und Norm gilt:

$$\begin{aligned} x \cdot y &= x \cdot y + \ldots + x_n \cdot y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \\ |x|^2 &= {x_1}^2 + \ldots + {x_n}^2 = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \\ |y|^2 &= {y_1}^2 + \ldots + {y_n}^2 = \sum_{i=1}^{n} {y_i}^2 \end{aligned}$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned} |x + y|^2 &= (x_1 + y_1)^2 + \ldots + (x_n + y_n)^2 \\ &= {x_1}^2 + 2 \cdot x_1 \cdot y_1 + {y_1}^2 + \ldots + {x_n}^2 + 2 \cdot x_n \cdot y_n + {y_n}^2 \\ &= {x_1}^2 + \ldots + {x_n}^2 + 2 \cdot (x_1 \cdot y_1 + \ldots + x_n \cdot y_n) + {y_1}^2 + \ldots + {y_n}^2 \\ &= |x|^2 + 2 \cdot x \cdot y + |y|^2 \qquad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Aufgabe 5

a. Bitte berechnen Sie die orthogonale Zerlegung von $y = (2, 3, 1, 1, 5, 0)$ längs $x = (1, -1, 2, -2, 1, -1)$

b. Bitte berechnen Sie die orthogonale Zerlegung von $y = (-4, -5, -13, -7, 1)$ längs $x = (3, 2, 2, 4, 2)$

c. Es seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $y = y^{par} + y^{senk}$ die orthogonale Zerlegung von y längs x. Weiter sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Bitte berechnen Sei die orthogonale Zerlegung von $\lambda \cdot y$ längs x.

Lösung Aufgabe 5

Teil a.
Allgemein gilt

$$y^{par} = \frac{x \cdot y}{|x|^2} \cdot x$$

Einsetzen und ausrechnen liefert für $x = (1, -1, 2, -2, 1, -1)$ und $y = (2, 3, 1, 1, 5, 0)$

$$\begin{aligned}
|x|^2 &= \left(\sqrt{12}\right)^2 = 12 \\
x \cdot y &= 2 + (-3) + 2 + (-2) + 5 = 4 \\
y^{par} &= \frac{x \cdot y}{|x|^2} \cdot x = \frac{4}{12} \cdot x = \frac{1}{3} \cdot x \\
y^{par} &= \frac{1}{3} \cdot (1, -1, 2, -2, 1, -1) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) \\
y^{senk} &= y - y^{par} = \left(\frac{5}{3}, \frac{10}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{14}{3}, \frac{1}{3}\right)
\end{aligned}$$

Probe, ob y^{senk} tatsächlich auf x senkrecht steht:

$$x \cdot y^{senk} = (1, -1, 2, -2, 1, -1) \cdot \left(\frac{5}{3}, \frac{10}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{14}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot (5 - 10 + 2 - 10 + 14 - 1) = 0.$$

Teil b.

Mit den Berechnungsformeln aus Teil a. erhält man für $x = (3, 2, 2, 4, 2)$ und $y = (-4, -5, -13, -7, 1)$:

$$\begin{aligned}
|x|^2 &= \left(\sqrt{37}\right)^2 = 37 \\
x \cdot y &= -12 + (-10) + (-26) + (-28) + 2 = -74 \\
y^{par} &= \frac{x \cdot y}{|x|^2} \cdot x = \frac{-74}{37} \cdot x \\
y^{par} &= -2 \cdot (3, 2, 2, 4, 2) = (-6, -4, -4, -8, -4) \\
y^{senk} &= y - y^{par} = (-4, -5, -13, -7, 1) - (-6, -4, -4, -8, -4) = (2, -1, -9, 1, 5)
\end{aligned}$$

Probe, ob y^{senk} tatsächlich auf x senkrecht steht:

$$x \cdot y^{senk} = (3, 2, 2, 4, 2) \cdot (2, -1, -9, 1, 5) = 6 - 2 - 18 + 4 + 10 = 0.$$

Teil c.

Mit den Berechnungsformeln aus Teil a. , angewandt x und $\lambda \cdot y$ erhält man:

$$\begin{aligned}
(\lambda \cdot y)^{par} &= \frac{x \cdot (\lambda \cdot y)}{|x|^2} \cdot x = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (\lambda \cdot y_i)}{|x|^2} \cdot x = \frac{\lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i}{|x|^2} \cdot x \\
\Rightarrow (\lambda \cdot y)^{par} &= \lambda \cdot y^{par} \quad \text{und} \\
(\lambda \cdot y)^{senk} &= (\lambda \cdot y) - (y^{par} \cdot \lambda) = (\lambda \cdot y) - (\lambda \cdot y^{par}) \\
\Rightarrow (\lambda \cdot y)^{senk} &= \lambda \cdot y^{senk}
\end{aligned}$$

Die orthogonale Zerlegung von $\lambda \cdot y$ längs x ist also:

$(\lambda \cdot y)^{par} = \lambda \cdot y^{par}$ und

$(\lambda \cdot y)^{senk} = \lambda \cdot y^{senk}$.

Aufgabe 6

a. Im $\mathbb{R}^n$ ist die Raumdiagonale des (n-dimensionalen) Einheitswürfels der Vektor, bei dem jede Komponente eine 1 ist. Welchen Winkel schließt die Raumdiagonale des Einheitswürfels mit einem Standard-Einheitsvektor ein?

b. Welche Zahlenwerte ergeben sich im $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^4$? Angabe bitte in Bogenmaß oder Grad, mit einer Nachkommastelle.

Lösung Aufgabe 6

Teil a.

Raumdiagonale ist der Vektor $(1, 1, 1, 1, ...1)$, der an jeder Stelle eine 1 hat. Insgesamt also n Einsen. Jeder Standardeinheitsvektor hat n-Komponenten. Alle sind 0, eine ist 1.

Deshalb ist das Skalarprodukt aus Raumdiagonale und Standardeinheitsvektor stets 1. Denn jede 1 der Raumdiagonale trifft auf eine Null, ausser der einen, die auf die 1 des Standardeinheitsvektors trifft.
Es ergibt sich für den Winkel α zwischen Raumdiagonale und Standardeinheitsvektor:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \arccos\left(\frac{x \cdot y}{|x| \cdot |y|}\right) \\
x \cdot y &= 1 \\
|x| &= \sqrt{n} \\
|y| &= 1 \\
\alpha &= \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{n} \cdot 1}\right) \\
&= \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

Teil b.

$$\begin{aligned}
&R^2 \Rightarrow x = (1,1); y = (1,0) \\
&\quad \alpha = \arccos\left(\frac{x \cdot y}{|x| \cdot |y|}\right) = \arccos\left(\frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 0}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4}\pi \\
&R^3 \Rightarrow x = (1,1,1); y = (0,1,0) \\
&\quad \alpha = \arccos\left(\frac{x \cdot y}{|x| \cdot |y|}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0.95531 \\
&R^4 \Rightarrow x = (1,1,1,1); y = (1,0,0,0) \\
&\quad \alpha = \arccos\left(\frac{x \cdot y}{|x| \cdot |y|}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{4}}\right) = \frac{1}{3}\pi
\end{aligned}$$