Übungsblatt 3 - Musterlösung

Technische Hochschule Mittelhessen, FB MNI, Lineare Algebra für Informatiker, Prof. Dr. B. Just

Aufgabe 1

Beim Information Retrieval geht es darum, die Ähnlichkeit von Text-Dokumenten zu quantifizieren. Das sogenannte Vektorraum-Modell sucht dazu geeignete Schlagworte aus den Dokumenten heraus, und ordnet jedem Dokument den Vektor zu, der angibt, wie oft das jeweilige Schlagwort im Dokument vorkommt.

Die folgende Situation ist einem Referat von Neuefeind und Steeg, „Information-Retrieval, Vektorraum-Modell", Uni Köln, 3.12.2009, entnommen. Es geht darum, Evidenz zu schaffen, dass bestimmte Texte vom selben Autor geschrieben wurden. Hierzu werden die Romane „Sense and Sensibility“ und „Pride and Prejudice“ von Jane Austen sowie „Wuthering Heights“ von Emily Brontë auf die Schlagworte „affection“, „jealous“, „gossip“ und „wuthering“ untersucht.
Folgende Häufigkeiten ergeben sich:

Schlagwort	**Sense and Sensibility**	**Pride and Prejudice**	**Wuthering Heights**
affection	115	58	20
jealous	10	7	11
gossip	2	0	6
wuthering	0	0	38

Bitte bezeichnen Sie mit x, y, z die drei Schlagwortvektoren, und berechnen Sie die Winkel zwischen den Vektoren.

Die Winkel zwischen Schlagwortvektoren sind ein Indikator dafür, ob zwei Texte aus der Feder des selben Autors stammen :-).

Lösung Aufgabe 1

Die Schlagwortvektoren sind:

$$\begin{aligned} x_{SaS} &= (115, 10, 2, 0) \\ y_{PaP} &= (58, 7, 0, 0) \\ z_{WH} &= (20, 11, 6, 38) \end{aligned}$$

Die Winkel zwischen den Schlagwortvektoren sind:

$$\begin{aligned} \alpha(x,y) &= \arccos\left(\frac{x \cdot y}{|x| \cdot |y|}\right) = \arccos\left(\frac{6740}{\sqrt{13329} \cdot \sqrt{3413}}\right) = 0.037 \\ \alpha(y,z) &= \arccos\left(\frac{y \cdot z}{|y| \cdot |z|}\right) = \arccos\left(\frac{1237}{\sqrt{3413} \cdot \sqrt{2001}}\right) = 1.078 \\ \alpha(x,z) &= \arccos\left(\frac{x \cdot z}{|x| \cdot |z|}\right) = \arccos\left(\frac{2422}{\sqrt{13329} \cdot \sqrt{2001}}\right) = 1.083 \end{aligned}$$

Die Winkelangaben sind im Bogenmaß gemessen. D.h., x und y sind fast parallel, während z mit x und y jeweils einen Winkel von grob 60^o hat. Das weist darauf hin, dass SaS und PaP aus der Feder desselben Autors stammen.

Aufgabe 2

Seien $k, n \in \mathbb{N},\ v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$, und $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. Dann heißt

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_k \cdot v_k \in \mathbb{R}^n$$

Linearkombination von $v_1, ..., v_k$.

a.) Es sei $n = 4,\ k = 3$ und $v_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix},\ \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 1.$

Bitte berechnen Sie $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$, also $\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 \cdot v_3$.

b.) Es sei $n = 2,\ k = 3$ und $v_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \end{pmatrix},\ \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 2.$

Bitte berechnen Sie $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$, also $\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 \cdot v_3$.

c.) Es sei $n = 5,\ k = 4$ und $v_1 = (1, 0, 0, 0, 0),\ v_2 = (0, 2, 0, 0, 0),\ v_3 = (0, 0, 3, 0, 0),\ v_4 = (0, 0, 0, 4, 0)$, $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 4,\ \lambda_3 = 8,\ \lambda_4 = 16$.

Bitte berechnen Sie $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$, also $\lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_4 \cdot v_4$.

d.) Es sei allgemein $k, n \in \mathbb{N}, k \leq n$. Für $i = 1, ..., k$ sei $v_i = i \cdot e_i$ das i-fache des i-ten Standardeinheitsvektors und $\lambda_i = 2^i$.

Bitte berechnen Sie $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$.

e.) Es seien allgemein $k, n \in \mathbb{N},\ v_1, ..., v_k \in \mathbb{R}^n$ beliebig, $\lambda_1 = ... = \lambda_k = 0$.

Bitte berechnen Sie $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$.

Lösung Aufgabe 2

a.) $\sum\limits_{i=1}^{3} \lambda_i v_i = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 \cdot v_3$.

$$= 2 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

b.) $\sum\limits_{i=1}^{3} \lambda_i v_i = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 \cdot v_3$.

$$= 3 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -18 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c.) $\sum\limits_{i=1}^{4} \lambda_i v_i = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 + \lambda_4 \cdot v_4$

$$= 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 8 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 16 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 24 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 64 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 24 \\ 64 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d.) $$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_k \cdot v_k = 2^1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + 2^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ \ldots + 2^k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2^1 \\ 2 \cdot 2^2 \\ \vdots \\ k \cdot 2^k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

e.) $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_k \cdot v_k = 0 \cdot v_1 + ... + 0 \cdot v_k = (0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$

Aufgabe 3

Es seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^4$. Bitte entscheiden Sie (mit Begründung), ob v_1, v_2, v_3 linear abhängig oder linear unabhängig sind.

a. $v_1 = (2, 1, 3, 1)$, $v_2 = (3, 2, -4, 0)$, $v_3 = (-1, -1, 7, 1)$.

b. $v_1 = (2, 0, 0, a)$, $v_2 = (0, 3, 0, 2a)$, $v_3 = (0, 0, 1, 3a)$ mit $a \in \mathbb{R}$.

Lösung Aufgabe 3

a. v_1, v_2, v_3 sind linear abhängig, denn $v_1 - v_2 = (2, 1, 3, 1) - (3, 2, -4, 0) = (-1, -1, 7, 1) = v_3$. (Der Nullvektor kann also nichttrivial als Linearkombination $v_1 - v_2 - v_3$ dargestellt werden.)

b. v_1, v_2, v_3 sind linear unabhängig. Denn es gilt:

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = (2\lambda_1, 3\lambda_2, \lambda_3, a \cdot (\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3))$.

Wenn dies der Nullvektor ist, sind insbesondere die ersten drei Komponenten Null, d.h. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Der Nullvektor kann also nur als triviale Linearkombination von v_1, v_2, v_3 dargestellt werden.

Aufgabe 4

Es seien $e_1, ..., e_n$ die Standardeinheitsvektoren des $\mathbb{R}^n$ und $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Für $i = 1, ..., n-1$ sei $v_i = a^i \cdot e_i$. Weiter sei $v_n = (a^n, a^n, ..., a^n, 0)$.

a. Sind $v_1, ..., v_n$ linear unabhängig (bitte mit Begründung oder Beweis)?

b. Welchen Raum spannen $v_1, ..., v_n$ auf?

Anmerkung: Wer mit Aufgabe 3 oder 4 nichts anfangen kann, setzt einfach $n = 7$:-).

Lösung Aufgabe 4

a. $v_1, ..., v_n$ sind linear abhängig. Denn der Nullvektor läßt sich darstellen als als nichttriviale Linearkombination der $v_1, ..., v_n$:

$$a^{n-1}v_1 + a^{n-2}v_2 + ... + a^2 v_{n-2} + a^1 v_{n-1} - v_n = (a^n - a^n, a^n - a^n, ..., a^n - a^n, 0) = (0, ..., 0).$$

b. $v_1, ..., v_n$ spannen den Unterraum E im $\mathbb{R}^n$ auf, der von den ersten $n-1$ Standardeinheitsvektoren aufgespannt wird. Denn:

i. Jeder Vektor im aufgespannten Unterraum hat in der letzten Komponente eine Null, d.h. $span(v_1, ..., v_n) \subseteq E$, und

ii. Für $i = 1, ..., n-1$ ist $e_i = \frac{1}{a^i} \cdot v_i$, d.h., $E \subseteq span(v_1, ..., v_n)$

Mit i. und ii. gilt $span(v_1, ..., v_n) = E$. q.e.d.

Aufgabe 5

Es sei $v \in \mathbb{R}^n$. Dann heißt die Menge $v^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot v = 0\}$ aller Vektoren, die senkrecht auf v stehen, das orthogonale Komplement von v.

Bitte zeigen Sie, dass $v^\perp$ ein Untervektorraum ist.

Lösung Aufgabe 5

Es muss gezeigt werden:

i. Mit $w_1, w_2 \in v^\perp$ gilt $w_1 + w_2 \in v^\perp$.

ii. Mit $w \in v^\perp$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\lambda w \in v^\perp$.

Beweis i.: Wegen der Rechenregeln (hier: der Linearität bei Addition) des Skalarproduktes gilt

$(w_1 + w_2) \cdot v = w_1 \cdot v + w_2 \cdot v = 0 + 0 = 0$,

also ist $w_1 + w_2 \in v^\perp$.

Beweis ii.: Wegen der Rechenregeln (hier: der Linearität bei Skalarmultiplikation) des Skalarproduktes gilt

$(\lambda w) \cdot v = \lambda \cdot (w \cdot v) = \lambda \cdot 0 = 0$,

also ist $V \in v^\perp$. q.e.d.