# Übungsblatt 3

Technische Hochschule Mittelhessen, FB MNI, Lineare Algebra für Informatiker, Prof. Dr. B. Just

## Aufgabe 1

Beim Information Retrieval geht es darum, die Ähnlichkeit von Text-Dokumenten zu quantifizieren. Das sogenannte Vektorraum-Modell sucht dazu geeignete Schlagworte aus den Dokumenten heraus, und ordnet jedem Dokument den Vektor zu, der angibt, wie oft das jeweilige Schlagwort im Dokument vorkommt.

Die folgende Situation ist einem Referat von Neuefeind und Steeg, „Information-Retrieval, Vektorraum-Modell", Uni Köln, 3.12.2009, entnommen. Es geht darum, Evidenz zu schaffen, dass bestimmte Texte vom selben Autor geschrieben wurden. Hierzu werden die Romane „Sense and Sensibility“ und „Pride and Prejudice“ von Jane Austen sowie „Wuthering Heights“ von Emily Brontë auf die Schlagworte „affection“, „jealous“, „gossip“ und „wuthering“ untersucht.
Folgende Häufigkeiten ergeben sich:

| **Schlagwort** | **Sense and Sensibility** | **Pride and Prejudice** | **Wuthering Heights** |
|---|---|---|---|
| affection | 115 | 58 | 20 |
| jealous | 10 | 7 | 11 |
| gossip | 2 | 0 | 6 |
| wuthering | 0 | 0 | 38 |

Bitte bezeichnen Sie mit $x, y, z$ die drei Schlagwortvektoren, und berechnen Sie die Winkel zwischen den Vektoren.

Die Winkel zwischen Schlagwortvektoren sind ein Indikator dafür, ob zwei Texte aus der Feder des selben Autors stammen :-).

## Aufgabe 2

Seien $k, n \in \mathbb{N},\ v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$, und $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. Dann heißt

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_k \cdot v_k \in \mathbb{R}^n$$

Linearkombination von $v_1, ..., v_k$.

a.) Es sei $n = 4,\ k = 3$ und $v_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix},\ \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 1.$

Bitte berechnen Sie $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$, also $\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 \cdot v_3$.

b.) Es sei $n = 2,\ k = 3$ und $v_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \end{pmatrix},\ \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 2.$

Bitte berechnen Sie $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$, also $\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 \cdot v_3$.

c.) Es sei $n = 5,\ k = 4$ und $v_1 = (1, 0, 0, 0, 0),\ v_2 = (0, 2, 0, 0, 0),\ v_3 = (0, 0, 3, 0, 0),\ v_4 = (0, 0, 0, 4, 0),$ $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 4,\ \lambda_3 = 8,\ \lambda_4 = 16.$

Bitte berechnen Sie $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$, also $\lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_4 \cdot v_4$.

d.) Es sei allgemein $k, n \in \mathbb{N}, k \leq n$. Für $i = 1, ..., k$ sei $v_i = i \cdot e_i$ das $i$-fache des $i$-ten Standardeinheitsvektors und $\lambda_i = 2^i$.

Bitte berechnen Sie $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$.

e.) Es seien allgemein $k, n \in \mathbb{N},\ v_1, ..., v_k \in \mathbb{R}^n$ beliebig, $\lambda_1 = ... = \lambda_k = 0$.

Bitte berechnen Sie $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$.

**... auf der Rückseite sind noch weitere Aufgaben ...**

## Aufgabe 3

Es seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^4$. Bitte entscheiden Sie (mit Begründung), ob $v_1, v_2, v_3$ linear abhängig oder linear unabhängig sind.

a. $v_1 = (2, 1, 3, 1)$, $v_2 = (3, 2, -4, 0)$, $v_3 = (-1, -1, 7, 1)$.

b. $v_1 = (2, 0, 0, a)$, $v_2 = (0, 3, 0, 2a)$, $v_3 = (0, 0, 1, 3a)$ mit $a \in \mathbb{R}$ .

## Aufgabe 4

Es seien $e_1, ..., e_n$ die Standardeinheitsvektoren des $\mathbb{R}^n$ und $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ . Für $i = 1, ..., n-1$ sei $v_i = a^i \cdot e_i$. Weiter sei $v_n = (a^n, a^n, ..., a^n, 0)$.

a. Sind $v_1, ..., v_n$ linear unabhängig (bitte mit Begründung oder Beweis)?

b. Welchen Raum spannen $v_1, ..., v_n$ auf?

Anmerkung: Wer mit Aufgabe 3 oder 4 nichts anfangen kann, setzt einfach $n = 7$.

## Aufgabe 5

Es sei $v \in \mathbb{R}^n$. Dann heißt die Menge $v^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot v = 0\}$ aller Vektoren, die senkrecht auf $v$ stehen, das <u>orthogonale Komplement von $v$</u>.

Bitte zeigen Sie, dass $v^\perp$ ein Vektorraum ist.

## Viel Spass und Erfolg :-)