Übungsblatt 4 - Musterlösungen

Technische Hochschule Mittelhessen
FB MNI, Lineare Algebra für Informatiker, Prof. Dr. B. Just

Aufgabe 1

Es sei $A = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$.

a.) Bitte berechnen Sie $A \cdot B$

b.) Bitte berechnen Sie $B \cdot A$

c.) Ist die Multiplikation von A und B kommutativ?

Lösung Aufgabe 1

a.) $A \cdot B = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 26 \\ 19 & -11 \end{pmatrix}$

b.) $B \cdot A = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -23 \\ -32 & 11 \end{pmatrix}$

c.) Die Multiplikation ist nicht kommutativ.

Aufgabe 2

Bitte berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right]$$

Lösung Aufgabe 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7a - 7 \\ -7b \\ 49 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 17 - 7a \\ 13 + 7b \\ -43 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Welche der Produkte $A \cdot B$, $A \cdot C$, $B \cdot A$, $B \cdot C$, $C \cdot A$ und $C \cdot B$ können gebildet werden? Bitte berechnen Sie diese Produkte.

Lösung Aufgabe 3

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 9 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \text{geht nicht!}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \text{geht nicht!}$$

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 3 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -8 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

Es sei $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix}$.

a.) Bitte berechnen Sie $(A \cdot B)^T$

b.) Bitte berechnen Sie $B^T \cdot A^T$

c.) Ist beides gleich?

d.) Anspruchsvoll :-) : Seien $m, n, p \in \mathbf{N}$. Bitte beweisen Sie: Für jede $m \times n$ - Matrix A und $n \times p$ - Matrix B gilt:

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T.$$

Lösung Aufgabe 4

a.)

$$\begin{aligned}(A \cdot B)^T &= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} \\ a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

b.)

$$B^T = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}, A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$B^T \cdot A^T = \begin{pmatrix} b_{11} \cdot a_{11} + b_{21} \cdot a_{12} & b_{11} \cdot a_{21} + b_{21} \cdot a_{22} \\ b_{12} \cdot a_{11} + b_{22} \cdot a_{12} & b_{12} \cdot a_{21} + b_{22} \cdot a_{22} \end{pmatrix}^T$$

c.) Ja, ist beides gleich.

d.)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}$$

Zunächst wird $(A \cdot B)^T$ betrachtet.

$$(A \cdot B)^T = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + \ldots + a_{1n} \cdot b_{n1} & \cdots & a_{m1} \cdot b_{11} + \ldots + a_{mn} \cdot b_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} \cdot b_{1p} + \ldots + a_{1n} \cdot b_{np} & \cdots & a_{m1} \cdot b_{1p} + \ldots + a_{mn} \cdot b_{np} \end{pmatrix}$$

An der Stelle j, i von $(A \cdot B)^T$ steht die reelle Zahl, die an der Stelle i, j der Matrix $A \cdot B$ steht, also $a_{i1} \cdot b_{1j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}$. D.h., für $i = 1, ..., m$ und $j = 1, ..., p$ gilt $(A \cdot B)^T_{ji} = a_{i1} \cdot b_{1j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}$.

Nun wird $B^T \cdot A^T$ betrachtet.

$$B^T = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{1p} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}, A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B^T \cdot A^T = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + \ldots + a_{1n} \cdot b_{n1} & \cdots & a_{m1} \cdot b_{11} + \ldots + a_{mn} \cdot b_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} \cdot b_{1p} + \ldots + a_{1n} \cdot b_{np} & \cdots & a_{m1} \cdot b_{1p} + \ldots + a_{mn} \cdot b_{np} \end{pmatrix}$$

Kommutativgesetz reeler Zahlen wurde angewendet, $a_{ij} b_{jk} = b_{jk} a_{ij}$ für alle vorkommenden i, j, k

An der Stelle j, i von $B^T \cdot A^T$ steht die reelle Zahl, die das Skalarprodukt der j-ten Zeile von B^T mit der i-ten Spalte von A^T ist. Das ist das Skalarprodukt der j-ten Spalte von B mit der i-ten Zeile von A. D.h., für $i = 1, ..., m$ und $j = 1, ..., p$ gilt $(B^T \cdot A^T)_{ji} = a_{i1} \cdot b_{1j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}$.

Zusammen zeigt sich, dass für $i = 1, ..., m$ und $j = 1, ..., p$ gilt $(B^T \cdot A^T)_{ji} = a_{i1} \cdot b_{1j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj} = (A \cdot B)^T_{ji}$. Da zwei Matrizen gleich sind, wenn sie an jeder einzelnen Stelle gleich sind, folgt daraus $B^T \cdot A^T = (A \cdot B)^T$.

Aufgabe 5

Es sei $A = (a_{i,j})$ eine $m \times n$-Matrix und $E_n = (e_{i,j})$ die $n \times n$-Einheitsmatrix. D.h., für $i, j = 1, ..., n$ ist $e_{i,i} = 1$ und für $j \neq i$ ist $e_{i,j} = 0$. Bitte beweisen Sie: $A \cdot E_n = A$.

Hinweis: Um die Gleichheit zweier Matrizen (hier $A \cdot E_n$ und A) zu zeigen, zeigt man zunächst, dass beide das gleiche Format haben. Dann zeigt man für jede Position i, j, dass beide Matrizen dort übereinstimmen.

Lösung Aufgabe 5:

Zu zeigen ist $A \cdot E_n = A$. Die Matrizen $A \cdot E_n$ und A sind beides $m \times n$-Matrizen. Sie sind gleich, wenn sie in jedem Eintrag übereinstimmen.

Somit ist für alle $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$ zu zeigen $(A \cdot E_n)_{ij} = a_{ij}$.

Dies gilt wie folgt:

$$(A \cdot E_n)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot e_{kj} = a_{ij}.$$

Dabei gilt die erste Gleichheit nach Definition der Matrixmultiplikation. Die zweite gilt, weil $e_{kj} = 0$ für $k \neq j$ und $e_{jj} = 1$ (d.h. alle Summanden außer dem j-ten verschwinden, und dieser ist a_{ij}).