Übungsblatt 5 - Musterlösung

Technische Hochschule Mittelhessen
FB MNI, Lineare Algebra für Informatiker, Prof. Dr. B. Just

Aufgabe 1

Eine Jordan-Matrix $A = (a_{i,j})$ ist eine $n \times n$- Matrix, die folgende Bedingungen alle zugleich erfüllt:

- Es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}$ sodass $a_{i,i} = \lambda$ für alle $i = 1, ..., n$. D.h., in der Diagonalen der Matrix steht überall λ.
- Für alle $i = 1, ..., n-1$ ist $a_{i,i+1} = 1$. D.h., in der sogenannten Nebendiagonalen, der schrägen Linie über der Hauptdiagonalen, steht überall 1.
- Alle anderen Elemente der Matrix sind Null.

a.) Bitte berechnen sie $A \cdot A$ für die Jordan-Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

b.) Bitte berechnen sie $A \cdot B$ für die Jordan-Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung Aufgabe 1:

a.)

$$A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(Ist auch gut zu sehen, wenn man ein Falk-Schema aufstellt).

b.)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda & \lambda+2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda & \lambda+2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda & \lambda+2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\lambda & \lambda+2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\lambda & \lambda+2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

(Ist auch gut zu sehen, wenn man ein Falk-Schema aufstellt).

Aufgabe 2

a.) Bitte berechnen Sie das Produkt aus zwei $n \times n$ - Jordan-Matrizen, wobei bei der einen Matrix in der Hauptdiagonale jeweils $\lambda \in \mathbb{R}$ und in der anderen Matrix in der Hauptdiagonale jeweils $\mu \in \mathbb{R}$ steht.

b.) Wenn A und B Jordan-Matrizen sind, ist dann $A \cdot B$ eine Jordan-Matrix? Warum?

c.) Wenn A und B Jordan-Matrizen sind, ist dann $A + B$ eine Jordan-Matrix? Warum?

Lösung Aufgabe 2:

a.) $$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & & 0 \\ & \lambda & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \lambda & 1 & \\ & & & & \lambda & 1 \\ 0 & & & & & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 1 & & & & 0 \\ & \mu & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \mu & 1 & \\ & & & & \mu & 1 \\ 0 & & & & & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\cdot\mu & \lambda+\mu & 1 & & & 0 \\ & \lambda\cdot\mu & \lambda+\mu & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \lambda\cdot\mu & \lambda+\mu & 1 \\ & & & & \lambda\cdot\mu & \lambda+\mu \\ 0 & & & & & \lambda\cdot\mu \end{pmatrix}$$

(Ist auch gut zu sehen, wenn man es im Falk-Schema aufschreibt).

b.) Wenn A und B Jordan-Matrizen sind, ist dann $A \cdot B$ eine Jordan-Matrix?
Nein, weil oberhalb der Nebendiagonalen von $A \cdot B$ keine Nullen, sondern Einsen stehen (siehe Teil a.)).

c.) Wenn A und B Jordan-Matrizen sind, ist dann $A + B$ eine Jordan-Matrix?
Nein, weil in der Nebendiagonale von $A + B$ keine Einsen stehen, sondern Zweien.

Aufgabe 3

Eine obere Dreiecksmatrix ist eine quadratische Matrix A, deren Einträge unterhalb der Diagonalen alle 0 sind. Es ist also $a_{ij} = 0$ für alle $i > j$.

a.) Die beiden 3×3 - Matrizen $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ seien obere Dreiecksmatrizen. Bitte zeigen Sie, dass $A \cdot B$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

b.) Es seien jetzt $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ beides $n \times n$ - Matrizen und beides obere Dreiecksmatrizen. Bitte zeigen Sie, dass $A \cdot B$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

Lösung Aufgabe 3:

a.) Es ist zu zeigen, dass die 3×3-Matrix $(A \cdot B)$ unterhalb der Hauptdiagonalen Nullen enthält. D.h., im Fall $n = 3$, dass die Elemente an den Positionen 2,1 sowie 3,1 und 3,2 Null sind.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\cdot b_{11} & a_{11}\cdot b_{12} + a_{12}\cdot b_{22} & a_{11}\cdot b_{13} + a_{12}\cdot b_{23} + a_{13}\cdot b_{33} \\ 0 & a_{22}\cdot b_{22} & a_{22}\cdot b_{23} + a_{23}\cdot b_{33} \\ 0 & 0 & a_{33}\cdot b_{33} \end{pmatrix}$$

An den Positionen unterhalb der Hauptdiagonale stehen Nullen, daher ist $A \cdot B$ eine obere Dreiecksmatrix.

b.) Hier ist zu zeigen, dass für alle $1 \le j < i \le n$ gilt: $(A \cdot B)_{ij} = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$(A \cdot B)_{ij}$ = Skalarprodukt i-te Zeile A mit j-te Spalte B.
Die i-te Zeile A hat in den ersten $i - 1$ Positionen Nullen, weil A eine obere Dreiecksmatrix ist:
$(\overbrace{0, 0, \ldots, 0}^{i-1}, a_{ii}, a_{i,i+1}, \ldots, a_n)$
Die j-te Spalte von B hat in den letzten $n - j$ Positionen Nullen, weil B eine obere Dreiecksmatrix ist.

j-te Spalte B: $\begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{jj} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Für alle $i > j$ gilt deshalb:

$$(A \cdot B)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} \cdot b_{kj} + \sum_{k=i}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} = 0 + 0 = 0.$$

Dabei gilt die erste Gleichheit nach Definition der Matrixmultiplikation. Die zweite gilt, weil $a_{ik} = 0$ für $k \leq i - 1$ und $b_{kj} = 0$ für $k \geq i \geq j$.

Aufgabe 4

Betrachtet wird der gerichtete Graph mit 5 Knoten v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 und den Kanten von v_1 nach v_2, von v_2 nach v_3, von v_3 nach v_4, von v_4 nach v_2, von v_2 nach v_5, von v_5 nach v_3, von v_3 nach v_1 und von v_1 nach v_5. (Zur Veranschaulichung stelle man sich von v_1 unten links, v_5 unten rechts, von v_2 über v_1 und v_3 über v_5 vor, und v_4 als Dachspitze über diesem Quadrat.)

a.) Bitte stellen Sie die Adjazenzmatrix des Graphen auf.

b.) Bitte berechnen Sie die Erreichbarkeitsmatrix nach genau 4 Schritten.

c.) Bitte nennen Sie alle unterschiedlichen Wege der Länge 4 von v_2 nach v_5.

Lösung Aufgabe 4:

a.) Adjazenzmatrix des Graphen: $A = (a_{ij})$ mit $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls Kante von } v_i \text{ nach } v_j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$.

Daher ist $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b.) Die Erreichbarkeitsmatrix nach genau 4 Schritten ist $A^4 = A \cdot A \cdot A \cdot A$ mit der Adjazenzmatrix A aus a.).

Es ist $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, denn $A^4 = A^2 \cdot A^2$ und

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

c.) Alle unterschiedlichen Wege der Länge 4 von v_2 nach v_5:

Es gibt 3 unterschiedliche Wege von v_2 nach v_5, denn $(A^4)_{2,5} = 3$. Diese sind:

1. Weg: $2 \to 3 \to 4 \to 2 \to 5$

2. Weg: $2 \to 3 \to 1 \to 2 \to 5$

3. Weg: $2 \to 5 \to 3 \to 1 \to 5$