

Übungsblatt 5

Technische Hochschule Mittelhessen
FB MNI, Lineare Algebra für Informatiker, Prof. Dr. B. Just

Aufgabe 1

Eine Jordan-Matrix $A = (a_{i,j})$ ist eine $n \times n$ -Matrix, die folgende Bedingungen alle zugleich erfüllt:

- Es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}$ sodass $a_{i,i} = \lambda$ für alle $i = 1, \dots, n$. D.h., in der Diagonalen der Matrix steht überall λ .
- Für alle $i = 1, \dots, n - 1$ ist $a_{i,i+1} = 1$. D.h., in der sogenannten Nebendiagonalen, der schrägen Linie über der Hauptdiagonalen, steht überall 1.
- Alle anderen Elemente der Matrix sind Null.

a.) Bitte berechnen sie $A \cdot A$ für die Jordan-Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

b.) Bitte berechnen sie $A \cdot B$ für die Jordan-Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

- a.) Bitte berechnen Sie das Produkt aus zwei $n \times n$ -Jordan-Matrizen, wobei bei der einen Matrix in der Hauptdiagonale jeweils $\lambda \in \mathbb{R}$ und in der anderen Matrix in der Hauptdiagonale jeweils $\mu \in \mathbb{R}$ steht.
- b.) Wenn A und B Jordan-Matrizen sind, ist dann $A \cdot B$ eine Jordan-Matrix? Warum?
- c.) Wenn A und B Jordan-Matrizen sind, ist dann $A + B$ eine Jordan-Matrix? Warum?

Aufgabe 3

Eine obere Dreiecksmatrix ist eine quadratische Matrix A , deren Einträge unterhalb der Diagonalen alle 0 sind. Es ist also $a_{ij} = 0$ für alle $i > j$.

- a.) Die beiden 3×3 -Matrizen $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ seien obere Dreiecksmatrizen. Bitte zeigen Sie, dass $A \cdot B$ eine obere Dreiecksmatrix ist.
- b.) Es seien jetzt $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ beides $n \times n$ -Matrizen und beides obere Dreiecksmatrizen. Bitte zeigen Sie, dass $A \cdot B$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

Aufgabe 4

Betrachtet wird der gerichtete Graph mit 5 Knoten v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 und den Kanten von v_1 nach v_2 , von v_2 nach v_3 , von v_3 nach v_4 , von v_4 nach v_2 , von v_2 nach v_5 , von v_5 nach v_3 , von v_3 nach v_1 und von v_1 nach v_5 . (Zur Veranschaulichung stelle man sich von v_1 unten links, v_5 unten rechts, von v_2 über v_1 und v_3 über v_5 vor, und v_4 als Dachspitze über diesem Quadrat.)

- a.) Bitte stellen Sie die Adjazenzmatrix des Graphen auf.
- b.) Bitte berechnen Sie die Erreichbarkeitsmatrix nach genau 4 Schritten.
- c.) Bitte nennen Sie alle unterschiedlichen Wege der Länge 4 von v_2 nach v_5 .

Viel Spass und Erfolg