Übungsblatt 9 - Musterlösungen

Technische Hochschule Mittelhessen
FB MNI, Lineare Algebra für Informatiker, Prof. Dr. B. Just

Aufgabe 1

a.) Sind die Spaltenvektoren (d.h., die Spalten der Matrix, aufgefasst als Vektoren) der folgenden Matrix linear unabhängig? $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b.) Liegt $(1, 1, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$ im von den Spaltenvektoren aufgespannten Unterraum des $\mathbb{R}^4$?

Lösung Aufgabe 1

a.) Wir betrachten, auf welche Art man den Nullvektor als Linearkombination der drei Spaltenvektoren darstellen kann:

$$(0, 0, 0, 0) = \lambda_1 \cdot (2, 2, 2, 1) + \lambda_2 \cdot (3, 2, 0, 0) + \lambda_3 \cdot (5, 1, -4, 1)$$

Denn genau dann, wenn $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ die einzige Möglichkeit ist, sind die Spalten linear unabhängig.
Die Lösungskoeffizienten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ erfüllen stets das folgende LGS:

λ_1	λ_2	λ_3	
2	3	5	0
2	2	1	0
2	0	-4	0
1	0	1	0

Auf Zeilenstufenform bringen.
Addiere -1-faches der ersten Zeile zur zweiten Zeile.

λ_1	λ_2	λ_3	
2	3	5	0
0	-1	-4	0
2	0	-4	0
1	0	1	0

Addiere -1-faches der ersten Zeile zur dritten Zeile.

λ_1	λ_2	λ_3	
2	3	5	0
0	-1	-4	0
0	-3	-9	0
1	0	1	0

Addiere $-\frac{1}{2}$-faches der ersten Zeile zur vierten Zeile.

λ_1	λ_2	λ_3	
2	3	5	0
0	-1	-4	0
0	-3	-9	0
0	-1.5	-1.5	0

Addiere -3-faches der zweiten Zeile zur dritten Zeile.

λ_1	λ_2	λ_3	
2	3	5	0
0	-1	-4	0
0	0	3	0
0	-1.5	-1.5	0

Addiere -1.5-fache der zweiten Zeile zur vierten Zeile.

λ_1	λ_2	λ_3	
2	3	5	0
0	-1	-4	0
0	0	3	0
0	0	4.5	0

Addiere $-\frac{4.5}{3}$-faches der dritten Zeile zur vierten Zeile.

λ_1	λ_2	λ_3	
2	3	5	0
0	-1	-4	0
0	0	3	0
0	0	0	0

Nebenrechnung:

Berechnung: λ_3: $3 \cdot \lambda_3 = 0$

$\Rightarrow \lambda_3 = 0$

Berechnung: λ_2: $-1 \cdot \lambda_2 - 4 \cdot \lambda_3 = 0$

$\Rightarrow \lambda_2 = 0$

Berechnung: λ_1: $2 \cdot \lambda_1 + 3 \cdot \lambda_2 + 5 \cdot \lambda_3 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0$

Die Lösung ist $\lambda_3 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_1 = 0$, d.h. $(2, 2, 2, 1)$, $(3, 2, 0, 0)$ und $(5, 1, -4, 1)$ sind linear unabhängig.

b.) $(1, 1, 1, 1)$ liegt genau dann im von den Spaltenvektoren aufgespannten Raum, wenn es Koeffizienten $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ gibt mit

$x_1 \cdot (2, 2, 2, 1) + x_2 \cdot (3, 2, 0, 0) + x_3 \cdot (5, 1, -4, 1) = (1, 1, 1, 1)$.

Das ist genau dann der Fall, wenn das folgende LGS lösbar ist:

x_1	x_2	x_3	
2	3	5	1
2	2	1	1
2	0	-4	1
1	0	1	1

In Zeilestufenform brngen.
Addiere -1-faches der ersten Zeile zur zweiten Zeile.

x_1	x_2	x_3	
2	3	5	1
0	-1	-4	0
2	0	-4	1
1	0	1	1

Addiere -1-faches der ersten Zeile zur dritten Zeile.

x_1	x_2	x_3	
2	3	5	1
0	-1	-4	0
0	-3	-9	0
1	0	1	1

Addiere $-\frac{1}{2}$-faches der ersten Zeile zur vierten Zeile.

x_1	x_2	x_3	
2	3	5	1
0	-1	-4	0
0	-3	-9	0
0	-1.5	-1.5	0.5

Addiere -3-faches der zweiten Zeile zur dritten Zeile.

x_1	x_2	x_3	
2	3	5	1
0	-1	-4	0
0	0	3	0
0	-1.5	-1.5	0.5

Addiere $-1\frac{1}{2}$-fache der zweiten Zeile zur vierten Zeile.

x_1	x_2	x_3	
2	3	5	1
0	-1	-4	0
0	0	3	0
0	0	4.5	0.5

Addiere $-\frac{4.5}{3}$ der dritten Zeile zur vierten Zeile.

x_1	x_2	x_3	
2	3	5	1
0	-1	-4	0
0	0	3	0
0	0	0	0.5

Das LGS ist nicht lösbar, d.h. es liegt $(1, 1, 1, 1)$ nicht in dem durch die Spaltenvektoren aufgespannten Unterraum.

Aufgabe 2

Für welche Werte von α und β hat das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung? Welche?

x_1	x_2	
1	α	1
3	$\beta + 3\alpha$	1
-2	$2\beta - 2\alpha$	α

Lösung Aufgabe 2

x_1	x_2	
1	α	1
3	$\beta + 3\alpha$	1
-2	$2\beta - 2\alpha$	α

subtrahiere 3-faches der ersten Zeile von der zweiten Zeile

x_1	x_2	
1	α	1
0	β	-2
-2	$2\beta - 2\alpha$	α

addiere 2-faches der ersten Zeile zur dritten Zeile

x_1	x_2	
1	α	1
0	β	-2
0	2β	$\alpha + 2$

subtrahiere 2-faches der zweiten Zeile von der dritten Zeile

x_1	x_2	
1	α	1
0	β	-2
0	0	$\alpha + 6$

Allgemein ist ein LGS in Zeilenstufenform genau dann lösbar, wenn für jede Nullzeile auf der linken Seite auch rechts eine Null steht. Das vorliegende LGS ist also genau dann lösbar, wenn zugleich erfüllt ist:

i.) $\alpha + 6 = 0$, d.h. $\alpha = -6$, und

ii.) $\beta \neq 0$.

Im Falle der Lösbarkeit hat das LGS also die Form

x_1	x_2	
1	-6	1
0	β	-2
0	0	0

In diesem Fall erhält man durch Rückwärts-Einsetzen die Lösung $(x_1, x_2) = (1 - \frac{12}{\beta}, -\frac{2}{\beta})$:

i.) $\beta x_2 = -2 \Longrightarrow x_2 = -\frac{2}{\beta}$,

ii.) $x_1 - 6x_2 = 1 \Longrightarrow x_1 = 1 + 6x_2 = 1 - \frac{12}{\beta}$.

Aufgabe 3

Bitte bestimmen Sie Zeilen- und Spaltenrang der folgenden Matrizen:

a.) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0,5 \\ 0 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ b.) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c.) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Lösung Aufgabe 3

a.) Die Matrix hat Zeilenstufenform mit drei nicht verschwindenden Zeilen. Damit ist
Zeilenrang $= 3$
Spaltenrang $= 3$
Zeilenrang und Spaltenrang sind gleich, weil sie bei jeder Matrix gleich sind.

b.) Die Matrix hat Zeilenstufenform mit drei nicht verschwindenden Zeilen. Damit ist
Zeilenrang $= 3$
Spaltenrang $= 3$
Zeilenrang und Spaltenrang sind gleich, weil sie bei jeder Matrix gleich sind.

c.) Matrix erst auf Zeilenstufenform bringen:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Addieren -1-faches der vierten Zeile zur zweiten Zeile.

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Addieren $-\frac{3}{2}$-faches der ersten Zeile zur dritten Zeile.

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Addiere $-\frac{1}{4}$-faches der ersten Zeile zur vierten Zeile.

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Addiere 1-faches der zweiten Zeile zur dritten Zeile.

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Addiere 1-faches der zweiten Zeile zur vierten Zeile.

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Addiere $-\frac{1}{2}$-faches der dritten Zeile zur vierten Zeile.

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die nicht verschwindenden Zeilen sind 3 d.h.
Zeilenrang $= 3$
Spaltenrang $= 3$

Aufgabe 4

Bitte finden Sie alle Vektoren $x \in \mathbb{R}^4$, die senkrecht auf allen drei Zeilenvektoren der folgenden Matrix stehen: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Lösung Aufgabe 4

Die Vektoren $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, die senkrecht auf allen drei Zeilenvektoren der Matrix stehen, sind genau die Lösungsvektoren des folgenden LGS:

x_1	x_2	x_3	x_4	
1	2	0	0	0
0	1	2	0	0
1	2	1	2	0

In Zeilestufenform brngen.
Addiere -1-faches der ersten Zeile zur dritten Zeile.

x_1	x_2	x_3	x_4	
1	2	0	0	0
0	1	2	0	0
0	0	1	2	0

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8\lambda \\ 4\lambda \\ -2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = (0, 0, 0, 0) + \lambda(-8, 4, -2, 1)$

<u>Nebenrechnung:</u>

Berechnung x_4: Frei wählbar, setze $x_4 = \lambda$

Berechnung x_3: 3-te Gleichung: $x_3 + 2 \cdot x_4 = 0$
$\Rightarrow x_3 + 2\lambda \Rightarrow x_3 = -2\lambda$

Berechnung x_2: 2-te Gleichung: $x_2 + 2 \cdot x_3 = 0$
$\Rightarrow x_2 + 2(-2\lambda) \Rightarrow x_2 = 4\lambda$

Berechnung x_1: 1-te Gleichung: $x_1 + 2 \cdot x_2 = 0$
$\Rightarrow x_1 + 2(4\lambda) \Rightarrow x_2 = -8\lambda$

Aufgabe 5

a.) Bitte beweisen ;-) Sie, dass die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $A\ x = 0$ ein Vektorraum ist.

b.) Die Lösungsmenge eines inhomogenen linearen Gleichungssystems, bei dem mindestens ein Eintrag der rechten Seite von Null verschieden ist, ist kein Vektorraum. Warum?

c.) Ein affiner Raum ist eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$, für die ein Vektor $v_0 \in \mathbb{R}^n$ und ein Vektorraum $V \subseteq \mathbb{R}^n$ existieren mit $A = \{v_0 + v : v \in V\}$.

Bitte beweisen Sie, dass die Löungsmenge des inhomogenen linearen Gleichungssystems $A\ x = b$, bei dem mindestens ein Eintrag der rechten Seite von Null verschieden ist, ein affiner Raum ist (sofern sie nicht leer ist).

Lösung Aufgabe 5

a.) Es ist zu zeigen: Mit $x = (x_1, ..., x_n),\ y = (y_1, ..., y_n),\ \lambda \in \mathbb{R}$ lösen auch $x + y$ und $\lambda \cdot x$ das lineare Gleichungssystem.
Dies gilt wegen:

i.) $A \cdot (x + y) = A \cdot x + A \cdot y = 0 + 0 = 0$ (Distributivität für Matrix-Addition und Matrix-Multiplikation), und

ii.) $A \cdot (\lambda x) = \lambda \cdot A \cdot x = \lambda \cdot 0 = 0$ (Distributivität für Skalarmultiplikation und Matrix-Multiplikation)

Es gibt auch andere Beweismöglichkeiten, z.B. indem man argumentiert, dass die Lösungsmenge das orthogonale Komplement aller Zeilen von A ist, oder indem man komponentenweise nachrechnet.

b.) Der Nullvektor $x = (0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$ ist in jedem Vektorraum enthalten, der Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist. Da der Nullvektor das Gleichungssystem nicht löst, ist er nicht Teilmenge der Lösungsmenge und damit ist die Lösungsmenge kein Vektorraum.

c.) Es ist zu zeigen, dass die Lösungsmenge die Gestalt $L = v_0 + V$ hat, wobei $V \subset \mathbb{R}^n$ ein Vektorraum ist. Da L die Gestalt

$$L = \{v_0 + \lambda_1 \cdot v_1 + ... + \lambda_{n-s} \cdot v_{n-s} : \lambda_1, ..., \lambda_{n-s} \in \mathbb{R}\}$$

hat, genügt es zu zeigen, dass

$$\{\lambda_1 \cdot v_1 + ... + \lambda_{n-s} \cdot v_{n-s} : \lambda_1, ..., \lambda_{n-s} \in \mathbb{R}\}$$

ein Vektorraum ist. Dies gilt, da es sich bei der Menge um den von $v_1, ..., v_{n-s}$ aufgespannten Raum handelt. Der aufgespannte Raum ist stets ein Vektorraum.