Übungsblatt 10 - Musterlösungen

Technische Hochschule Mittelhessen
FB MNI, Lineare Algebra für Informatiker, Prof. Dr. B. Just

Aufgabe 1

a.) Bitte bestimmen Sie eine Basis des Vektorraumes des $\mathbb{R}^3$, der aus allen Vektoren besteht, die senkrecht auf $(1,1,1)$ stehen.

b.) Was stellt die Lösungsmenge aus a. geometrisch dar (leer, Punkt, Ebene, Raum, etwas anderes?)

c.) Bitte bestimmen Sie eine Basis des Vektorraumes des $\mathbb{R}^3$, der aus allen Vektoren besteht, die senkrecht auf $(1,1,1)$ und auf $(1,0,1)$ stehen.

d.) Was stellt die Lösungsmenge aus c. geometrisch dar (leer, Punkt, Ebene, Raum, etwas anderes?)

Lösung Aufgabe 1

a.) Eine Basis des Vektorraumes ist: $(-1,0,1),\ (-1,1,0)$

Beweis: Der Untervektorraum besteht aus allen $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$, die das folgende LGS erfüllen:

$$(1,1,1) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

Die Lösungsmenge L berechnet sich durch $x_3 = \lambda_1, x_2 = \lambda_2$,
x_1 erfüllt $x_1 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0$, also $x_1 = -\lambda_1 - \lambda_2$

$$L = \{\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$$

Eine Basis des Vektorraumes ist also : $(-1,0,1),\ (-1,1,0)$

b.) Die Lösungsmenge ist: Eine Ebene im $\mathbb{R}^3$

Beweis: Die Lösungsmenge ist eine Ebene im $\mathbb{R}^3$, die von $(-1,0,1),(0,-1,1)$ aufgespannt wird.

c.) Eine Basis des Vektorraumes ist: $(-1,0,1)$

Beweis: Die Lösungsmenge sind alle $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$, die das folgende LGS erfüllen:

x_1	x_2	x_3	
1	1	1	0
1	0	1	0

Äquivalent (ziehe erste Zeile von zweiter ab)

x_1	x_2	x_3	
1	1	1	0
0	−1	0	0

Die Lösungsmenge berechnet sich durch $x_3 = \lambda$, $x_2 = 0$, $x_1 = -\lambda$; der gesuchte Unterraum besteht aus allen $\lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Basis ist $(-1,0,1)$.

d.) Die Lösungsmenge ist: Eine Gerade im $\mathbb{R}^3$

Beweis: Die Lösungsmenge ist eine Gerade, aufgespannt von $(1,0,-1)$.

Aufgabe 2

Welche der Matrizen

$B = \begin{pmatrix} 0,25 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0,2 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad D = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ -10 & 4 \end{pmatrix}$

ist zu $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 0,25 \end{pmatrix}$ invers? Bitte machen sie die Probe.

Lösung Aufgabe 2

Die inverse Matrix ist: $D = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ -10 & 4 \end{pmatrix}$

Probe: $D \cdot A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ -10 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 0,25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Für die Aufgabenstellung nicht unbedingt erforderlich, aber als Nebenrechung evtl. interessant:

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0,25 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 0,25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25,25 & 1,25 \\ 10 & 0,5 \end{pmatrix}$

$B \neq A^{-1}$.

$C \cdot A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0,2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 0,25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 20,4 & 1 \end{pmatrix}$

$C \neq A^{-1}$.

Aufgabe 3

Welche Bedingungen müssen für die Variablen a, b, c, d, e, f gelten, damit die folgenden Matrizen invertierbar sind?

a.) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$ b.) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}$ c.) $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & b & 1 \\ 3 & c & 1 \end{pmatrix}$

Lösung Aufgabe 3

a.)

Die Matrix ist invertierbar, wenn gilt:
$a \neq 0 \wedge d \neq 0 \wedge f \neq 0$

Beweis: Die Matrix ist invertierbar, wenn ihre Determinante nicht Null ist. Das es sich um eine obere Dreiecksmatrix handelt, ist die Determinante $a \cdot d \cdot f$. Dieser Ausdruck ist genau dann nicht Null, wenn gilt $a \neq 0 \wedge d \neq 0 \wedge f \neq 0$

b.)

Die Matrix ist nie invertierbar.

Beweis: Da die zweite Zeile das doppelte der ersten Zeile ist, sind die Zeilen der Matrix linear abhängig, also ist sie nicht invertierbar.

Alternativ: Die Determinante der Matrix ist, wie man durch Entwicklung nach der dritten Zeile sieht:

$$a \cdot (2 \cdot 6 - 3 \cdot 4) + a \cdot (1 \cdot 4 - 2 \cdot 2) = 0$$

also ist die Matrix nicht invertierbar.

c.)

Die Matrix ist invertierbar, wenn gilt:
$c - 2b + a \neq 0$

Beweis: Die Matrix ist genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante nicht Null ist. Nach der Regel vom ($\mathbb{R}^3$-) Sarrus ist die Determinante

$$1 \cdot b \cdot 1 + a \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot c - 1 \cdot b \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot c - a \cdot 2 \cdot 1 = b + 3a + 2c - 3b - c - 2a = a - 2b + c$$

Aufgabe 4

Bitte finden Sie die Inversen zu den folgenden Matrizen, falls diese existieren, und machen Sie jeweils die Probe:

a.) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ b.) $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$ c.) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Lösung Aufgabe 4

a.)

Die inverse Matrix ist: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Probe: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$

Benutzung der Formel zur Invertierung von 2×2-Matrizen:

$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Hier: $A^{-1} = \frac{1}{2 \cdot 2 - 1 \cdot 1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{4-1} & \frac{-1}{4-1} \\ \frac{-1}{4-1} & \frac{2}{4-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Probe:
$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$

b.)

Die inverse Matrix ist: Im Falle $\lambda \neq \pm 1$: $\begin{pmatrix} \frac{1}{1-\lambda^2} & \frac{-\lambda}{1-\lambda^2} \\ \frac{-\lambda}{1-\lambda^2} & \frac{1}{1-\lambda^2} \end{pmatrix}$

Im Falle $\lambda = \pm 1$ ist die Matrix nicht invertierbar.

Probe: $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\lambda^2} & \frac{-\lambda}{1-\lambda^2} \\ \frac{-\lambda}{1-\lambda^2} & \frac{1}{1-\lambda^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$

Im Fall $\lambda = \pm 1$ ist die Matrix nicht invertierbar, da die Zeilen Vielfache voneinander sind, also der Rang nicht vollständig ist.

Im Fall $\lambda \neq \pm 1$ Benutzung der Formel zur Invertierung von 2×2-Matrizen: für $\lambda \neq \pm 1$

$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Hier : $A^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 1 - \lambda^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\lambda^2} & \frac{-\lambda}{1-\lambda^2} \\ \frac{-\lambda}{1-\lambda^2} & \frac{1}{1-\lambda^2} \end{pmatrix}$

Probe:
$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\lambda^2} & \frac{-\lambda}{1-\lambda^2} \\ \frac{-\lambda}{1-\lambda^2} & \frac{1}{1-\lambda^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$

c.)

Die inverse Matrix ist: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Probe: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3$

	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Subtrahiere 3 mal Zeile 1 von Zeile 2	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Subtrahiere Zeile 1 von Zeile 3	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Subtrahiere 1/2 mal Zeile 3 von Zeile 2	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Addiere 1/2 mal Zeile 2 zu Zeile 1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{5}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Division durch Diagonalelemente	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

<u>Probe:</u>

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3$

Aufgabe 5

Bitte berechnen Sie mit dem Gauss-Jordan-Verfahren die Inverse zur Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Bitte machen Sie die Probe.

Lösung Aufgabe 5

Die inverse Matrix ist: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

Probe: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_4$

	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Subtrahiere Zeile 1 von Zeile 2	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Vertausche Zeile 2 und Zeile 3	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Subtrahiere Zeile 3 von Zeile 2	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Subtrahiere Zeile 2 von Zeile 1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Division durch Diagonalelemente	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Probe:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_4$$