

# Übungsblatt 11 - Musterlösung x

Technische Hochschule Mittelhessen

FB MNI, Lineare Algebra für Informatiker, Prof. Dr. B. Just

## Aufgabe 1

Es wird die Abbildung  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  betrachtet, die die Ebene um 120 Grad gegen den Uhrzeigersinn dreht.

a.) Für welche Matrix  $A$  ist  $F((x, y)) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  ?

Hinweis: Die Spalten von  $A$  sind die Bilder der Basisvektoren. Wer will, kann sich davon überzeugen:

Man berechne  $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

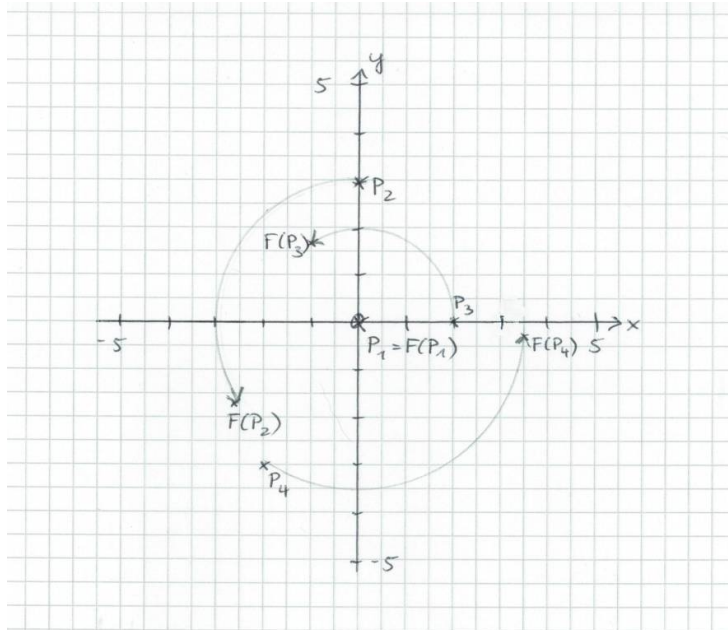
b.) Bitte zeichnen Sie die Punkte  $P_1 = (0, 0)$ ,  $P_2 = (0, 3)$ ,  $P_3 = (2, 0)$  und  $P_4 = (-2, -3)$  sowie ihre Bildpunkte in ein Koordinatensystem ein.

## Lösung Aufgabe 1

a.) Nach Definition von Sinus und Cosinus dreht eine Drehung um den Winkel  $\alpha$  den Vektor  $(1, 0)$  nach  $(\cos \alpha, \sin \alpha)$  und den Vektor  $(0, 1)$  nach  $(\cos(\alpha + 90^\circ), \sin(\alpha + 90^\circ)) = (-\sin \alpha, \cos \alpha)$ .

Die gesuchte Matrix ist also  $\begin{pmatrix} \cos 120^\circ & -\sin 120^\circ \\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

b.)



Die Koordinaten der Bildpunkte sind:

$$F(P_1) = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F(P_2) = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\sqrt{3}/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -2,6 \\ -1,5 \end{pmatrix}$$

$$F(P_3) = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1 \\ 1,7 \end{pmatrix}$$

$$F(P_4) = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 3\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3} + 3/2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3,6 \\ -0,2 \end{pmatrix}$$

## Aufgabe 2

Gegeben sei die lineare Abbildung  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ . Die Bilder der Einheitsvektoren seien  $F((1, 0, 0)) = (2, 3, 4, 5)$ ,  $F((0, 1, 0)) = (1, -1, 1, -1)$  und  $F((0, 0, 1)) = (0, 0, 1, -1)$ .

- a.) Was ist das Bild  $F((5, 2, 3))$  des Vektors  $(5, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$  ?  
b.) Welches ist die darstellende Matrix  $A$  mit  $F(x) = A \cdot x$  für alle  $x \in \mathbb{R}^3$  ?

$G : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  sei jetzt die Projektion aus dem  $\mathbb{R}^4$  auf die x-y-Ebene. Die Hintereinanderausführung  $G \circ F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  wendet also auf einen Vektor des  $\mathbb{R}^3$  erst  $F$  an, und projiziert das Bild dann auf die x-y-Ebene (letzte beide Koordinaten Null).

- c.) Was ist das Bild  $G \circ F((5, 2, 3))$  des Vektors  $(5, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$  ?  
d.) Welches ist die darstellende Matrix  $B$  mit  $G \circ F(x) = B \cdot x$  für alle  $x \in \mathbb{R}^3$  ?

### Lösung Aufgabe 2:

a.)

$$\text{Ergebnis: } F\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 12 \\ 13 \\ 25 \\ 20 \end{pmatrix}, \text{ denn}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} :$$

$$F \text{ linear} \Rightarrow F\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = 5 \cdot F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + 2 \cdot F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + 3 \cdot F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 13 \\ 25 \\ 20 \end{pmatrix}$$

b.)

$$\text{Ergebnis: } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ denn Spalten sind die Bilder der Basisvektoren}$$

c.)

$$G \circ F\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 12 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Nach a.) ist  $G \circ F\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$  der Vektor den man erhält,

wenn man die letzten beiden Komponenten von  $\begin{pmatrix} 12 \\ 13 \\ 25 \\ 10 \end{pmatrix}$  weglässt.

d.)

$$\text{Ergebnis: } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ denn die Spalten sind die Bilder der Basisvektoren.}$$

Bilder erhält man durch Anwendung von F, und dann G (letzte beiden Komponenten weglassen).

### Aufgabe 3

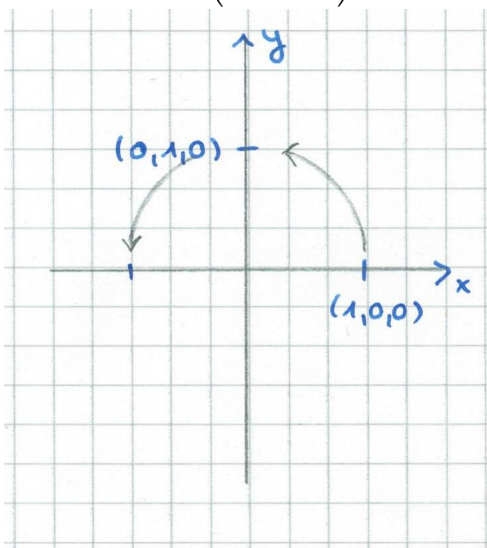
$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  sei die lineare Abbildung, die die x-y-Ebene um 90 Grad gegen den Uhrzeigersinn dreht und die z-Achse unverändert lässt.  $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  sei die lineare Abbildung, die die y-z-Ebene um 90 Grad gegen den Uhrzeigersinn dreht und die x-Achse unverändert lässt. Dabei sind die Einheitsvektoren so ausgerichtet, dass  $(1, 0, 0)$  wie üblich nach rechts,  $(0, 1, 0)$  wie üblich nach oben und  $(0, 0, 1)$  aus der Papierebene hinaus, in Richtung Betrachter zeigt.

- Was ist die darstellende Matrix der Abbildung  $F$ ? (Hinweis: Spalten sind die Bilder der Basisvektoren ...).
- Was ist die darstellende Matrix der Abbildung  $G$ ?
- Was ist die darstellende Matrix der Abbildung  $G \circ F$ , die erst die x-y-Ebene dreht und dann die y-z-Ebene?
- Was ist die darstellende Matrix der Abbildung  $F \circ G$ ?
- Ist  $F \circ G = G \circ F$ ?

### Lösung Aufgabe 3

a.)

Ergebnis:  $M_F = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



$$F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

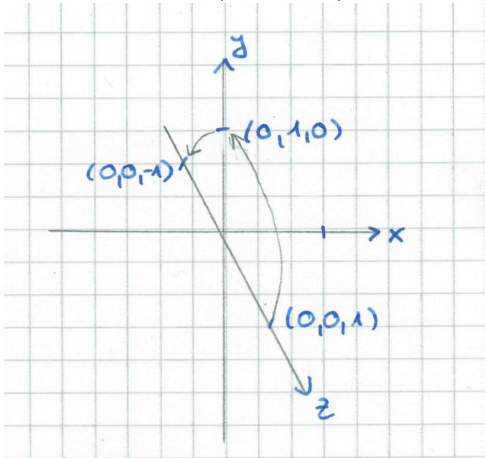
$$F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Spalten sind die Bilder der Basisvektoren

b.)

$$\text{Ergebnis: } M_G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$



$$G\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$G\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$G\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Spalten sind die Bilder der Basisvektoren

c.)

$$\text{Ergebnis: } \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Darstellende Matrix von } G \circ F \text{ ist } M_G \cdot M_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d.)

$$\text{Ergebnis: } \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Darstellende Matrix von } F \circ G \text{ ist } M_F \cdot M_G = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e.) Nein - Ergebnismatrizen aus c. und d. sind unterschiedlich.

## Aufgabe 4

Es sei  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  ein fester Vektor,  $(a, b) \neq (0, 0)$ . Die Translation  $T_{(a,b)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist die Abbildung, die jeden Vektor  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  um  $(a, b)$  verschiebt,  $(x, y) \mapsto (x, y) + (a, b) = (x + a, y + b)$ . Translationen kommen z.B. in google maps vor, wenn man die Landkarte verschiebt.

a.) Ist die Translation  $T_{(a,b)}$  eine lineare Abbildung ?

b.) Betrachtet wird jetzt die Abbildung  $F_{(a,b)} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ .

Ist  $F_{(a,b)}$  linear?

c.) Was ist das Bild eines Vektors  $(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3$  unter  $F_{(a,b)}$ ?

d.) Was ist  $E = \{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$  geometrisch?

e.) Aufgabenteile a. bis d. haben gezeigt, dass man die Translation im  $\mathbb{R}^2$  aus einer geeigneten linearen Abbildung des  $\mathbb{R}^3$  ablesen kann, wenn man diese auf einen geeigneten 2-dimensionalen Unterraum beschränkt. Das hat Vorteile für die Berechnung, denn die Hintereinanderausführung linearer Abbildungen ist (über die Matrixmultiplikation) sehr viel einfacher zu behandeln als die Hintereinanderausführung nichtlinearer Abbildungen.

Wir gehen eine Dimension höher:

In der Robotik kommen Translationen des  $\mathbb{R}^3$  vor, die einen Gegenstand im Raum verschieben. Kann eine Translation  $T_{(a,b,c)}$  des  $\mathbb{R}^3$  analog aus einer geeigneten linearen Abbildung des  $\mathbb{R}^4$  abgelesen werden?

## Lösung Aufgabe 4

a.) Die Abbildung  $T_{(a,b)}$  ist nicht linear für  $(a, b) \neq (0, 0)$ , denn dann ist für  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$T_{(a,b)}((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = (x_1 + x_2 + a, y_1 + y_2 + b) \\ \neq (x_1, y_1) + (a, b) + (x_2, y_2) + (a, b) = T_{(a,b)}(x_1, y_1) + T_{(a,b)}(x_2, y_2).$$

(Andere Nachweise sind möglich).

b.) Die Abbildung  $F_{(a,b)}$  ist linear, denn sie ordnet jedem Vektor das Produkt einer Matrix  $M$  mit diesem Vektor zu. Wegen der Eigenschaften der Matrixmultiplikation ist für  $v, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3, \lambda \in \mathbb{R}$ :

i.)  $M(v_1 + v_2) = Mv_1 + Mv_2$  und ii.)  $M(\lambda v) = \lambda(Mv)$ .

c.) Das Bild ist  $(x + a, y + b, 1)$ , denn  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + a \\ y + b \\ 1 \end{pmatrix}$

d.)  $E$  ist eine Ebene im  $\mathbb{R}^3$ . Sie wird von der Abbildung  $F_{(a,b)}$  auf sich selbst abgebildet.

e.) Ja, die gesuchte Abbildung ist  $F_{(a,b,c)} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  mit  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ .

$$\text{Man erhält dann wie in c.) } F_{(a,b,c)}(x, y, z, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + a \\ y + b \\ z + c \\ 1 \end{pmatrix}$$