Übungsblatt 11

Technische Hochschule Mittelhessen
FB MNI, Lineare Algebra für Informatiker, Prof. Dr. B. Just

Aufgabe 1

Es wird die Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ betrachtet, die die Ebene um 120 Grad gegen den Uhrzeigersinn dreht.

a.) Für welche Matrix A ist $F((x, y)) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$?

Hinweis: Die Spalten von A sind die Bilder der Basisvektoren. Wer will, kann sich davon überzeugen: Man berechne $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b.) Bitte zeichnen Sie die Punkte $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (0, 3)$, $P_3 = (2, 0)$ und $P_4 = (-2, -3)$ sowie ihre Bildpunkte in ein Koordinatensystem ein.

Aufgabe 2

Gegeben sei die lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$. Die Bilder der Einheitsvektoren seien $F((1, 0, 0)) = (2, 3, 4, 5)$, $F((0, 1, 0)) = (1, -1, 1, -1)$ und $F((0, 0, 1)) = (0, 0, 1, -1)$.

a.) Was ist das Bild $F((5, 2, 3))$ des Vektors $(5, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$?

b.) Welches ist die darstellende Matrix A mit $F(x) = A \cdot x$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$?

$G : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ sei jetzt die Projektion aus dem $\mathbb{R}^4$ auf die x-y-Ebene. Die Hintereinanderausführung $G \circ F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ wendet also auf einen Vektor des $\mathbb{R}^3$ erst F an, und projiziert das Bild dann auf die x-y-Ebene (letzte beide Koordinaten Null).

c.) Was ist das Bild $G \circ F((5, 2, 3))$ des Vektors $(5, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$?

d.) Welches ist die darstellende Matrix B mit $G \circ F(x) = B \cdot x$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$?

Aufgabe 3

$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei die lineare Abbildung, die die x-y-Ebene um 90 Grad gegen den Uhrzeigersinn dreht und die z-Achse unverändert lässt. $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei die lineare Abbildung, die die y-z-Ebene um 90 Grad so dreht, dass der Einheitsvektor in Richtung z-Achse auf den Einheitsvektor in Richtung y-Achse abgebildet wird, und die x-Achse unverändert bleibt. Dabei sind die Einheitsvektoren so ausgerichtet, dass $(1, 0, 0)$ wie üblich nach rechts, $(0, 1, 0)$ wie üblich nach oben und $(0, 0, 1)$ aus der Papierebene hinaus, in Richtung Betrachter zeigt.

a.) Was ist die darstellende Matrix der Abbildung F? (Hinweis: Spalten sind die Bilder der Basisvektoren ....).

b.) Was ist die darstellende Matrix der Abbildung G?

c.) Was ist die darstellende Matrix der Abbildung $G \circ F$, die erst die x-y-Ebene dreht und dann die y-z-Ebene?

d.) Was ist die darstellende Matrix der Abbildung $F \circ G$?

e.) Ist $F \circ G = G \circ F$?

... auf der Rückseite ist noch eine Aufgabe

Aufgabe 4

Es sei $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ ein fester Vektor, $(a,b) \neq (0,0)$. Die Translation $T_{(a,b)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist die Abbildung, die jeden Vektor $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ um (a,b) verschiebt, $(x,y) \mapsto (x,y) + (a,b) = (x+a, y+b)$. Translationen kommen z.B. in google maps vor, wenn man die Landkarte verschiebt.

a.) Ist die Translation $T_{(a,b)}$ eine lineare Abbildung ?

b.) Betrachtet wird jetzt die Abbildung $F_{(a,b)} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Ist $F_{(a,b)}$ linear?

c.) Was ist das Bild eines Vektors $(x,y,1) \in \mathbb{R}^3$ unter $F_{(a,b)}$?

d.) Was ist $E = \{(x,y,1) \in \mathbb{R}^3 | x,y \in \mathbb{R}\}$ geometrisch?

e.) Aufgabenteile a. bis d. haben gezeigt, dass man die Translation im $\mathbb{R}^2$ aus einer geeigneten linearen Abbildung des $\mathbb{R}^3$ ablesen kann, wenn man diese auf einen geeigneten 2-dimensionalen Unterrraum beschränkt. Das hat Vorteile für die Berechnung, denn die Hintereinanderausführung linearer Abbildungen ist (über die Matrixmultiplikation) sehr viel einfacher zu behandlen als die Hintereinanderausführung nichtlinearer Abbildungen.
Wir gehen eine Dimension höher:
In der Robotik kommen Translationen des $\mathbb{R}^3$ vor, die einen Gegenstand im Raum verschieben. Kann eine Translation $T_{(a,b,c)}$ des $\mathbb{R}^3$ analog aus einer geeigneten linearen Abbildung des $\mathbb{R}^4$ abgelesen werden?

Viel Spass und Erfolg :-)