Übungsblatt 12 - Musterlösung

Technische Hochschule Mittelhessen
FB MNI, Lineare Algebra für Informatiker, Prof. Dr. B. Just

Aufgabe 1

Es sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a.) Bitte bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A, mit Begründung.

b.) Bitte bestimmen Sie die Eigenwerte von A mit Erläuterung.

c.) Bitte bestimmen Sie jeweils einen Eigenvektor pro Eigenwert, mit kurzer Erläuterung.

Lösung Aufgabe 1:

a.)
Ergebnis: $\omega^2 - 4\omega$, denn:

Charakteristisches Polynom ist Determinante der Matrix $\begin{pmatrix} 2-\omega & 4 \\ 1 & 2-\omega \end{pmatrix}$

also $(2-\omega)^2 - 4 = 4 - 4\omega + \omega^2 - 4 = \omega^2 - 4\omega$

b.) Ergebnis: $\omega_1 = 0$; $\omega_2 = 4$, denn:

Die Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\omega^2 - 4\omega = \omega(\omega - 4)$

$\Rightarrow$ Nullstellen sind $\omega_1 = 0$ und $\omega_2 = 4$

c.)
Ergebnis : Eigenvektoren zu $\omega_1 = 0$ sind alle Vektoren im $\mathbb{R}^2$ der Gestalt $\lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ für $\lambda \in \mathbb{R}$, denn:

Eigenvektor (x_1, x_2) zum Eigenwert 0 erfüllt

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & & \\ 2 & 4 & = & 0 \\ 1 & 2 & = & 0 \end{array}$$

subtr. $\frac{1}{2}\cdot$ Zeile 1 von Zeile 2

$$\begin{array}{cccccc} & x_1 & x_2 & & \\ \Rightarrow & 2 & 4 & = & 0 \\ & 0 & 0 & = & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow 2x_1 + 4x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2x_2$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d.)
Ergebnis : Eigenvektoren zu $\omega_2 = 4$ sind alle Vektoren im $\mathbb{R}^2$ der Gestalt $\lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ für $\lambda \in \mathbb{R}$, denn:

Eigenvektor (x_1, x_2) zum Eigenwert 4 erfüllt

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & x_2 & & & x_1 & x_2 & & & x1 & x2 & \\ 2-4 & 4 & =0 & \Rightarrow & -2 & 4 & =0 & \Rightarrow & -2 & 4 & =0 \\ 1 & 2-4 & =0 & & 1 & -2 & =0 & & 0 & 0 & =0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

x_1: $-2x_1 + 4\lambda = 0 \Rightarrow x_1 = 2\lambda$

Aufgabe 2

Eine <u>stochastische Matrix</u> ist eine quadratische Matrix, bei der alle Einträge im Intervall $[0,1]$ liegen, und bei der für jede Zeile die Summe der Elemente, die in dieser Zeile stehen, 1 ergibt.

So ist z.B. $M = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$ eine stochastische Matrix.

a.) Bitte bestimmen Sie das Charakteristische Polynom der genannten Matrix M.

b.) Bitte bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix M.

c.) Bitte bestimmen Sie einen Eigenvektor der Matrix M zum Eigenwert 1, mit Nachweis, dass es ein Eigenvektor ist.

d.) Bitte zeigen Sie, dass jede stochastische $n \times n$- Matrix den Eigenvektor $(1,1,...,1) \in \mathbb{R}^n$ hat, und nennen Sie den zugehörigen Eigenwert.

(Im Zweifel $n = 7$ nehmen :-)).

Lösung Aufgabe 2:

a.) Ergebnis : $(0,5-\omega)\cdot(\omega-1)\cdot(\omega-0,2) = -\omega^3 + 1,3\omega^2 - 0,2\omega - 0,1$, denn:

Char. Pol. ist det $\begin{pmatrix} 0,5-\omega & 0,5 & 0 \\ 0,3 & 0,3-\omega & 0,4 \\ 0 & 0,5 & 0,5-\omega \end{pmatrix}$

Sarrus

$$= (0,5-\omega)\cdot(0,3-\omega)\cdot(0,5-\omega) + 0 + 0 - 0 - 0,5\cdot 0,4\cdot(0,5-\omega) - 0,3\cdot 0,5\cdot(0,5-\omega)$$
$$= (0,5-\omega)\cdot(0,15 - 0,8\omega + \omega^2 - 0,2 - 0,15)$$
$$= (0,5-\omega)\cdot(\omega^2 - 0,8\omega - 0,2) = (0,5-\omega)\cdot(\omega-1)\cdot(\omega+0,2)$$

b.) Ergebnis: $\omega_1 = 1$; $\omega_2 = 0,5$ $\omega_3 = -0,2$, denn die Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

c.) Ergebnis: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, denn

$$\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also ist (1,1,1) Eigenvektor zum Eigenwert 1.

Herleitung über $\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \\ 0,5-1 & 0,5 & 0 & =0 \\ 0,3 & 0,3-1 & 0,4 & =0 \\ 0 & 0,5 & 0,5-1 & =0 \end{array}$ oder über Teil d. der Aufgabe

d.) Sei $A = (a_{ij})$ eine stochastische Matrix. Dann ist $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$ für jede Zeile $i = 1,...,n$

Es ist $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}$, denn an der i-ten Stelle des Ergebnisvektors steht

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot 1 = \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$$

Damit ist (1,...,1) ein Eigenvektor zum Eigenwert 1.

Aufgabe 3

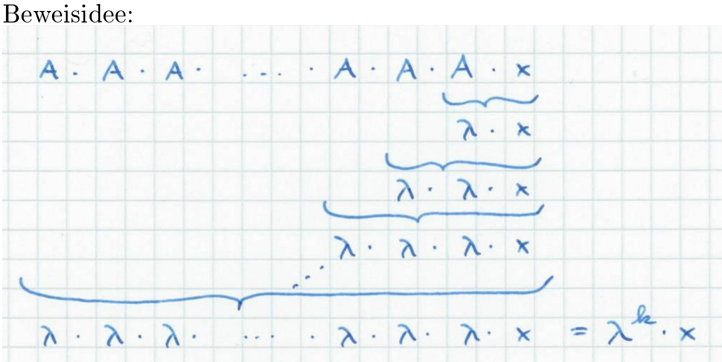
Für die $n \times n$-Matrix A sei $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, ..., 0)\}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$.

Bitte zeigen Sie:

Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist x ein Eigenvektor der Matrix A^k zum Eigenwert λ^k.

Lösung Aufgabe 3:

Beweisidee:



Formaler Beweis durch vollständige Induktion nach k:

$\underline{k = 1:}$ Z. z. ist, dass x Eigenwert der Matrix A zum Eigenwert λ ist.
Das gilt, weil es vorausgesetzt ist.

$\underline{k \to k + 1:}$
Es gelte die Aussage für k, d.h. es sei x ein Eigenvektor der Matrix A^k zum Eigenwert λ^k. Es gelte also $A^k \cdot x = \lambda^k \cdot x$.
Zu zeigen ist, dass x ein Eigenvektor der Matrix A^{k+1} zum Eigenwert λ^{k+1} ist, d.h., dass gilt:

$$A^{k+1} \cdot x = \lambda^{k+1} \cdot x.$$

Dies gilt wegen:

$$A^{k+1} \cdot x = A \cdot (A^k \cdot x) = A \cdot \lambda^k \cdot x = \lambda^k \cdot A \cdot x = \lambda^k \cdot \lambda \cdot x = \lambda^{k+1} \cdot x.$$

Dabei gilt die zweite Gleichheit nach Induktionsvoraussetzung, die anderen wegen der Eigenschaften der Multiplikation von Matrizen und von Matrizen mit Skalaren. Bei der vierten Gleichheit wird auch $A \cdot x = \lambda \cdot x$ benutzt.