# Übungsblatt 13 - Musterlösungen

Technische Hochschule Mittelhessen
Lineare Algebra für Informatiker, Prof. Dr. B. Just

## Aufgabe 1

Bitte berechnen Sie die Vektorprodukte

a.) der Vektoren $a = (7, 2, 3)$ und $b = (5, -4, 1)$,

b.) der Vektoren $a = (7, 2, 3)$ und $b = (1, 1, 0)$,

c.) der Vektoren $a = (a_1, a_2, 0)$ und $b = (b_1, b_2, 0)$.

### Lösung Aufgabe 1

a.) $$a \times b = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - (-4) \cdot 3 \\ 3 \cdot 5 - 1 \cdot 7 \\ 7 \cdot (-4) - 5 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 8 \\ -38 \end{pmatrix}$$

b.) $$a \times b = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 - 1 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 - 0 \cdot 7 \\ 7 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

c.) $$a \times b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot 0 - b_2 \cdot 0 \\ 0 \cdot b_1 - 0 \cdot a_1 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

## Aufgabe 2

Gegeben seien im $\mathbb{R}^3$ die drei Punkte $p_1 = (1, 1, 1)$, $p_2 = (2, 4, 1)$ und $p_3 = (x, y, z)$.

a.) Wie groß ist die Fläche des Dreiecks, dessen Ecken der Nullpunkt, $p_1$ und $p_2$ sind?

b.) Bitte finden Sie einen Vektor, der senkrecht auf der Dreiecksfläche steht und Länge 1 hat.

c.) Wie groß ist das Volumen des von $p_1$, $p_2$ und $p_3$ (aufgefasst als Vektoren vom Nullpunkt zum jeweiligen Punkt) gebildeten Spats?

### Lösung Aufgabe 2

a.) Die Fläche ist $\frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right|$

$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2}$

$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{14} \approx 1.87$

b.) Auf der Dreiecksfläche steht lt. a) der Vektor $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ senkrecht. Seine Norm ist $\sqrt{14}$. Also hat der Vektor $(\frac{-3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}})$ die Norm 1 und steht senkrecht auf der Dreiecksfläche.

c.) Das Volumen ist der Betrag der Determinante der Matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ 1 & 4 & y \\ 1 & 1 & z \end{pmatrix}$, deren Spalten die gegebenen Vektoren sind.
Nach $\mathbb{R}^3$ - Sarrus ist $|\det(M)| = |4z + 2y + x - 4x - y - 2z| = |-3x + y + 2z|$.

## Aufgabe 3

Gegeben seien im $\mathbb{R}^3$ zwei Punkte $p_1$, $p_2$, zwei Geraden $g_1$, $g_2$ und zwei Ebenen $e_1$, $e_2$. Dabei ist

$p_1 = (2, 3, 4)$, $p_2 = (-2, 2, 2)$.

$g_1$ ist die Gerade, die durch $P_1$ und $P_2$ geht.

$g_2 = (3, 3, 3) + \lambda \cdot (1, 0, 1)$.

$e_1 : 2x + 3y - 2z = 1$

$e_2 = (3, 3, 3) + \lambda \cdot (1, 0, 1) + \mu \cdot (0, 1, 1)$.

a.) Bitte geben Sie eine parametrisierte Form von $g_1$ an.

b.) Bitte geben Sie eine parametrisierte Form von $e_1$ an.

c.) Bitte geben Sie eine Koordinatenform von $e_2$ an.

d.) Liegt $p_1$ auf $e_1$? (Bitte mit Begründung).

e.) Bitte entscheiden Sie, ob die beiden Ebenen sich schneiden, und bestimmen Sie gegebenenfalls die Schnittgerade.

f.) Bitte bestimmen Sie den Abstand von $p_2$ und $e_1$.

g.) Bitte bestimmen Sie den Abstand der beiden Geraden.

h.) Bitte entscheiden Sie, ob $g_1$ und $e_2$ sich schneiden, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt.

i.) Bitte bestimmen sie den Winkel zwischen den beiden Ebenen (dieser ist definiert als der Winkel zwischen den beiden Normalenvektoren).

### Lösung Aufgabe 3

a.) Eine parametrisierte Form erhält man z.B., indem man $P_1$ als Stützvektor und $P_2 - P_1$ als Richtungsvektor einsetzt:

$g_1 = (2, 3, 4) + \lambda \cdot ((-2, 2, 2) - (2, 3, 4))$
$g_1 = (2, 3, 4) + \lambda \cdot (-4, -1, -2)$

b.) Zunächst werden drei Punkte auf $e_1$ berechnet:

- Punkt a: Setzte $x_a = 0$, $y_a = 0$
  $-2\ z_a = 1$
  $z_a = -0.5$
  => a= ( 0; 0; −0.5)
- Punkt b: Setzte $x_b = 0$, $y_b = 1$
  $3-2\ z_b = 1$
  $z_b = 1$
  => b= ( 0; 1; 1)
- Punkt c: Setzte $x_c = 1$, $y_c = 0$
  $2-2\ z_c = 1$
  $z_c = 0.5$
  => c = ( 1; 0; 0.5)
- Eine parametrisierte Form erhält man z.B., indem man b als Stützvektor und $a - b$ sowie $c - b$ als Richtungsvektoren nimmt:
  $e_1 = (0; 1; 1) + \lambda \cdot ((0; 0; \frac{1}{2}) - (0; 1; 1)) + \mu \cdot ((1; 0; \frac{1}{2}) - (0; 1; 1))$
  $e_1 = (0; 1; 1) + \lambda \cdot (0; -1; \frac{-3}{2}) + \mu \cdot (1; -1; \frac{-1}{2})$

c.) Der Normalenvektor der Ebene ist

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Das Skalarprodukt zwischen Stützvektor und Normalenvektor ist $(3;3;3) \cdot (-1;-1;1) = -3$
Die Koordinatenform ist also
$e_2$: $-x - y + z = -3$

d.) $p_1$ liegt auf $e_1$, wenn die Koordinaten von $p_1$ die Koordinatengleichung von $e_1$ erfüllen, d.h., wenn gilt:
$2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 =?1$
Wegen $5 \neq 1$ gilt diese Gleichung nicht, also liegt $p_1$ nicht auf $e_1$.

e.) Die Richtungsvektor $a$ der Schnittgeraden steht senkrecht auf beiden Normalenvektoren der Ebenen, ist also deren Vektorenprodukt. ( Für den Normalenvektor von $e_2$ vgl Aufgabe c.) ).

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ein Stützvektor $(x, y, z)$ der Schnittgeraden liegt auf beiden Ebenen. Er erfüllt also

$$\begin{pmatrix} x & y & z & & \\ 2 & 3 & -2 & = & 1 \\ -1 & -1 & 1 & = & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & = & 1 \\ 0 & 0.5 & 0 & = & -2.5 \end{pmatrix} \qquad \text{addiere die Hälfte der ersten Zeile zu Zeile 2}$$

Als Stützvektor kann z.B. $(8, -5, 0)$ gewählt werden.
Schnittgerade: $(8, -5, 0) + \lambda \cdot (1, 0, 1)$.

f.) Für $e_1$ wird die Parameterdarstellung aus b.) genutzt:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

Außerdem der Normalenvektor $( \ 2,\ 3,\ -2)$ von $e_1$. Der Abstandsvektor von $p_2$ und $e_1$ ist der zu $(2, 3, -2)$ parallele Anteil von $p_2 - (0, 1, 1)$, also von $(-2, 2, 2) - (0, 1, 1) = (-2, 1, 1)$.
Orthogonale Zerlegung von $y = (-2, 1, 1)$ längs $x = (2, 3, -2)$ liefert:
$y^{par} = \frac{x \cdot y}{|x|^2} \cdot x = \frac{(2,3,-2) \cdot (-2,1,1)}{4+9+4} \cdot (2, 3, -2)$

$y^{par} = \frac{-3}{17} \cdot (2, 3, -2)$

Die Länge von $y^{par}$ ist der gesuchte Abstand zwischen Punkt und Ebene:
$|y^{par}| = \frac{3}{17} \cdot |(2, 3, -2)| = \frac{3}{17} \cdot \sqrt{17} = \frac{3}{\sqrt{17}}$

g.) Nach a.) ist Gerade $g_1 : (2, 3, 4) + \lambda(-4, -1, -2)$ und Gerade $g_2 : (3, 3, 3) + \lambda(1, 0, 1)$.
Der Abstand ist daher

$$\frac{|((2, 3, 4) - (3, 3, 3)) \cdot ((-4, -1, -2) \times (1, 0, 1))|}{|(-4, -1, -2) \times (1, 0, 1)|)}$$
$$= \frac{|(-1, 0, 1) \cdot (-1, 2, 1)|}{|(-1, 2, 1)|}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\text{weil } \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot 1 - 0 \cdot (-2) \\ (-2) \cdot 1 - 1 \cdot (-4) \\ (-4) \cdot 0 - 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

h.) Den Schnittpunkt einer Gerade (in Parameterform) mit einer Ebene (in Normal- bzw. Koordinatenform) erhält man, indem man die Geradengleichung in die Koordinatenform einsetzt und das $\lambda$ berechnet. Hier ergibt sich:

Gerade $(2,3,4) + \lambda \cdot (-4,-1,-2)$ wegen Teil a. der Aufgabe

Ebene: $-x - y + z = -3$ wegen Teil c. der Aufgabe.

Einsetzen: Der Schnittpunkt $(x, y, z)$ erfüllt mit $x = 2 - 4\lambda$ und $y = 3 - \lambda$ und $z = 4 - 2\lambda$ und der Ebenengleichung $-x - y + z = -3$, also

$-2 + 4\lambda - 3 + \lambda + 4 - 2\lambda = -3$

also $\lambda = -2/3$.

Der Schnittpunkt ist $(2,3,4) - \frac{2}{3} \cdot (-4,-1,-2) = \frac{1}{3}(14, 11, 16)$.

i.) Der Winkel $\alpha$ zwischen den Normalenvektoren $(2,3,-2)$ und ( laut c.) ) $(-1,-1,1)$ ist

$$\alpha = \arccos\left(\frac{(2,3,-2)\cdot(-1,-1,1)}{\sqrt{2^2+3^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+(1)^2+1^2}}\right)$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{-7}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{3}}\right) = 2,94\text{.... ( im Bogenmaß)} \approx 168^\circ$$

## Aufgabe 4

Bitte zeigen Sie die folgenden Eigenschaften des Vektorprodukes, dabei sind $S, T \in \mathbb{R}^3$:

i.) $S \times T$ steht senkrecht auf $S$ und auf $T$, also auf der ganzen von $S$ und $T$ aufgespannten Ebene.

ii.) Sind S und T Vielfache, $S = \lambda \cdot T$, so ist $|S \times T| = 0$.

### Lösung Aufgabe 4

Es seien $S = (s_1, s_2, s_3)$ und $T = (t_1, t_2, t_3)$.

i.) Zunächst wird gezeigt, dass $S \times T$ senkrecht auf $S$ steht, also, dass das Skalarprodukt von $S \times T$ mit $S$ Null ergibt:

$$\begin{aligned}(S \times T) \cdot S &= s_1 s_2 t_3 - s_1 s_3 t_2 \\ &+ s_2 s_3 t_1 - s_2 s_1 t_3 \\ &+ s_3 s_1 t_2 - s_3 s_2 t_1 \\ &= 0\end{aligned}$$

Nun wird gezeigt, dass $S \times T$ senkrecht auf $T$ steht, also, dass das Skalarprodukt von $S \times T$ mit $T$ Null ergibt:

$$\begin{aligned}(S \times T) \cdot T &= t_1 s_2 t_3 - t_1 s_3 t_2 \\ &+ t_2 s_3 t_1 - t_2 s_1 t_3 \\ &+ t_3 s_1 t_2 - t_3 s_2 t_1 \\ &= 0\end{aligned}$$

Ist nun $v$ ein Element der von $S$ und $T$ aufgespannten Ebene, also $v = \lambda_1 \cdot S + \lambda_2 \cdot T$ für geeignete $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, so ist das Skalarprodukt von $V$ mit $S \times T$ Null, denn man rechnet unter Benutzung der Eigenschaften des Skalarproduktes nach:

$$\begin{aligned}(S \times T) \cdot v &= (S \times T) \cdot (\lambda_1 \cdot S + \lambda_2 \cdot T) \\ &= (S \times T) \cdot (\lambda_1 \cdot S) + (S \times T) \cdot (\lambda_2 \cdot T) \\ &= \lambda_1 \cdot (S \times T) \cdot S + \lambda_2 \cdot (S \times T) \cdot T \\ &= \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_1 \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

ii.) Wegen $S = \lambda \cdot T$ und $S = (s_1, s_2, s_3)$ ist $T = (\lambda s_1, \lambda s_2, \lambda s_3)$. Also ist:

$$(S \times T) = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \lambda s_1 \\ \lambda s_2 \\ \lambda s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_2 \cdot \lambda s_3 - \lambda s_2 \cdot s_3 \\ s_1 \cdot \lambda s_3 - \lambda s_1 \cdot s_3 \\ s_1 \cdot \lambda s_2 - \lambda s_1 \cdot s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das Vektorprodukt $S \times T$ ist also der Nullvektor, somit ist $|S \times T| = 0$.