Übungsblatt 4 - Musterlösungen

Technische Hochschule Mittelhessen, Mathematik 1 für EI, Prof. Dr. B. Just

Aufgabe 1

a.) $z(z-w) = (2+3j)\cdot(2+3j-(-1+2j)) = (2+3j)\cdot(3+j) = 6+3j^2+9j+2j = 6-3+11j = 3+11j$

b.) $\mathrm{Re}(z^* \cdot w) = \mathrm{Re}((2-3j)\cdot(-1+2j))$

$= \mathrm{Re}((-2-6j^2+3j+4j))$

$= \mathrm{Re}((-2+6+7j)) \qquad \text{weil } j^2=-1$

$= \mathrm{Re}(4+7j) = 4$

c.)

$$\frac{z}{w*} = \frac{(2+3j)}{-1-2j} = \frac{(2+3j)\cdot(-1+2j)}{(-1-2j)\cdot(-1+2j)} = \frac{-2-3j+4j+6j^2}{1^2+2^2} = \frac{-8+j}{5} = -\frac{8}{5}+\frac{1}{5}j$$

d.)

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(\frac{z^2}{w}) &= \mathrm{Im}((2+3j)\cdot(2+3j)\cdot\frac{-1-2j}{(-1)^2+(-2)^2})\\ &= \mathrm{Im}((4-9+6j+6j)\cdot(\frac{-1-2j}{5}))\\ &= \mathrm{Im}(\frac{(-5+12j)(-1-2j)}{5})\\ &= \mathrm{Im}(\frac{5-24j^2-12j+10j}{5}) = \mathrm{Im}(\frac{29}{5}-\frac{2}{5}j) = -\frac{2}{5}\end{aligned}$$

e.) $w^*(z-j) = (-1-2j)(2+3j-j)$

$= (-1-2j)(2+2j)$

$= -2-4j^2-4j-2j$

$= -2+4-6j = 2-6j$

f.) $|z-w^*| = |2+3j-(-1-2j)|$

$= |2+3j+1+2j| = |3+5j|$

$= \sqrt{3^2+5^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

g.)

$$|\frac{1}{w}+\frac{1}{5}| = |\frac{-1-2j}{(-1)^2+(-2)^2}+\frac{1}{5}| = |\frac{-1-2j}{1+4}+\frac{1}{5}| = |\frac{-1-2j}{5}+\frac{1}{5}| = |-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}j+\frac{1}{5}| = |-\frac{2}{5}j| = \frac{2}{5}$$

Aufgabe 2

Es sei in polarer Darstellung: $z = |z| \cdot e^{j\varphi_z}$, $w = |w| \cdot e^{j\varphi_w}$ mit Winkeln φ_z, φ_w

a.) $(z \cdot w)^* = (|z| \cdot e^{j\varphi_z} \cdot |w| \cdot e^{j\varphi_w})^*$

$= (|z| \cdot |w| \cdot e^{j(\varphi_z + \varphi_w)})^*$

$= (|z| \cdot |w| \cdot e^{-j(\varphi_z + \varphi_w)})$

$= |z| \cdot e^{-j\varphi_z} \cdot |w| \cdot e^{-j\varphi_w} = z^* \cdot w^*$

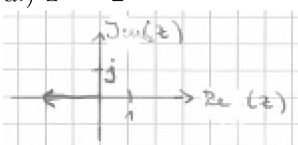
b.) $|z \cdot w| = ||z| \cdot e^{j\varphi_z} \cdot |w| \cdot e^{j\varphi_w}|$

$= |z| \cdot |w| \cdot |e^{j(\varphi_z+\varphi_w)}|$ reelle Zahlen vor den Betrag ziehen

$= |z| \cdot |w|$ weil $|e^{j\varphi}| = 1$ für alle φ

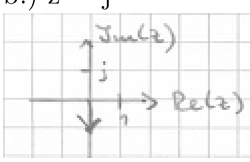
Aufgabe 3

a.) z = -2



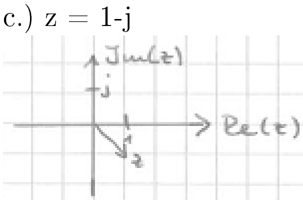
$\varphi = 180^o = \pi;\ |z| = 2 => z = 2 \cdot e^{j\pi}$

b.) z= -j



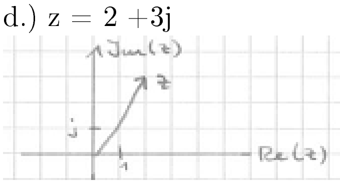
$\varphi = -\frac{\pi}{2};\ |z| = 1 => z = e^{-j\frac{\pi}{2}}$

c.) z = 1-j



$|z| = \sqrt{2};\ \varphi = -\frac{\pi}{4} => z = \sqrt{2} \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}}$ (oder $z = \sqrt{2}e^{j\cdot\frac{7}{4}}$)

d.) z = 2 +3j



$|z| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$ (Pythagoras); $\varphi = \arctan\frac{3}{2} \approx 0,98$

$=> z = \sqrt{13} \cdot e^{j\cdot 0,98}$

e.) Konjugiert komplex zu d. $=> z = \sqrt{13} \cdot e^{-j\cdot 0,98}$

f.) $(\sqrt{3}+j) \cdot (2+2\sqrt{3}j) = \sqrt{3} \cdot 2 - 2 \cdot \sqrt{3} + 2j + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}j = 2j + 6j = 8j$

$|z| = 8,\ \varphi = 90^o \mathrel{\widehat{=}} \frac{\pi}{2} => z = 8 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$

Aufgabe 4

a.) $z = a + bj$ mit $a = 2 \cdot \cos(30°)$ und $b = 2 \cdot \sin(30°)$,

also $a = 2 \cdot \sqrt{3}/2 = \sqrt{3} \approx 1,732$ und $b = 2 \cdot 1/2 = 1$,

somit $z = \sqrt{3} + j \approx 1,732 + j$.

b.) $z = a + bj$ mit $a = \cos(200°)$ und $b = \sin(200°)$,

also $a \approx -0,9397$ und $b \approx -0,342$,

somit $z \approx -0,9397 - 0,342j$.

c.) $z = a + bj$ mit $a = 5 \cdot \cos(-\pi/3)$ und $b = 5 \cdot \sin(-\pi/3)$,

also $a = 5 \cdot 1/2 = 2,5$ und $b = 5 \cdot (-\sqrt{3}/2) \approx -4,33$,

somit $z \approx 2,5 - 4,33j$.

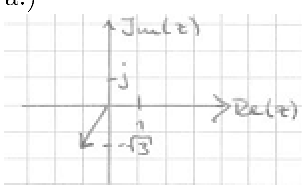
d.) $z = a + bj$ mit $a = 1,5 \cdot \cos(2\pi/3)$ und $b = 1,5 \cdot \sin(2\pi/3)$,

also $a = 1,5 \cdot (-1/2) = -0,75$ und $b = 1,5 \cdot (\sqrt{3}/2) \approx 1,299$,

somit $z \approx -0,75 + 1,299j$.

Aufgabe 5

a.)



$z = -1 - \sqrt{3}j \Rightarrow |z| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{1+3} = 2$

$\varphi = \pi + \arctan\sqrt{3} = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

Somit: $z = 2 \cdot e^{j \cdot \frac{4\pi}{3}}$

Also: $z^8 = 2^8 \cdot e^{j \cdot \frac{32\pi}{3}} = 256 \cdot e^{j \cdot \frac{32\pi}{3}} = 256 \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{3}}$

(Periodizität von 2π, daher ist es erlaubt, im Exponenten 10π abzuziehen.)

b.) Alternative 1:

$(1-j)^{16} = ((1-j) \cdot (1-j))^8 = (1 - 2j - 1)^8 = (-2j)^8 = 256.$

Alternative 2: Laut Aufgabe 3c ist $1 - j = \sqrt{2} \cdot e^{-j\pi/4}$, also

$(1-j)^{16} = \sqrt{2}^{16} \cdot e^{-16j\pi/4} = 256 \cdot e^{-8j\pi} = 256$

weil $-8j\pi$ ein ganzzahliges Vielfaches von 2π ist.

c.) $(\sqrt{2}e^{j\pi/4})^9 = \sqrt{2}^9 \cdot e^{j9\pi/4} = \sqrt{2}^9 \cdot e^{j\pi/4}$

d.) $(3 \cdot e^{j45°})^4 = 3^4 \cdot e^{j \cdot 4 \cdot 45°} = 81 \cdot e^{j \cdot 180°}$ (genau, ist -81 :-))

Aufgaben 6

a.)

Zeiger Anfangszustand y_1 ist $2 \cdot e^{\frac{j\pi}{2}}$

Zeiger Anfangszustand y_2 ist $1 \cdot e^{\frac{j\pi}{3}}$

b.) Der Zeiger ist $z = 2 \cdot e^{\frac{j\pi}{2}} + e^{\frac{j\pi}{3}}$

Gesucht ist seine Darstellung in Polarform.

Dazu: $z = 2 \cdot e^{\frac{j\pi}{2}} + e^{\frac{j\pi}{3}}$

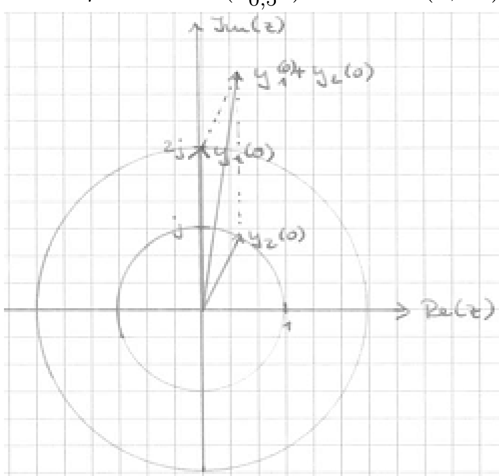
$= 2 \cdot (\cos(\frac{\pi}{2}) + j \cdot \sin(\frac{\pi}{2})) + \cos(\frac{\pi}{3}) + j \cdot \sin(\frac{\pi}{3})$

$= 2 \cdot 0 + 2 \cdot j \cdot 1 + 0,5 + j = 0,5 + j \cdot 2,866$

Damit: $|z| = \sqrt{0,5^2 + 2,866^2} \approx \sqrt{0,25 + 8,21} \approx 2,9$

Der Winkel φ, den z mit der positiven x- Achse einschließt, ist

$\varphi = \arctan(\frac{2,866}{0,5}) \approx \arctan(5,73) \approx 1,4 \mathrel{\widehat{=}} 80,1^o$



c.)

Die harmonische Schwingung $y_1(x) + y_2(x)$ hat die Gestalt $2,9 \cdot \sin(3x + 1,4)$.