Übungsblatt 9 - Musterlösungen

Technische Hochschule Mittelhessen, Mathematik 1 für EI, Prof. Dr. B. Just

Aufgabe 1

a.) $f'(x) = a$

b.) $f'(t) = 3 \cdot 4t^3 + 7 \cdot 2t = 12t^3 + 14t$

c.) $f'(x) = 4ax^3 + 2bx$

d.) z.B. mit Produktregel: $u = v = x + 2$, $u' = v' = 1$
$f'(x) = u' \cdot v + v' \cdot u$
$=> f'(x) = 1 \cdot (x+2) + 1 \cdot (x+2) = 2(x+2)$

e.) z.B. Ausmultiplizieren:
$f(x) = (Ax+B)^2 = A^2x^2 + 2ABx + B^2$
$=> f'(x) = 2A^2x + 2AB$

f.) Produktregel:
$u(t) = \sin(t)$, $u'(t) = \cos(t)$
$v(t) = \cos(t)$, $v'(t) = -\sin(t)$

$=> f'(x) = \cos(t) \cdot \cos(t) + (-\sin(t)) \cdot \sin(t)$
$= \cos^2(t) - \sin^2(t)$

g.) Quotientenregel:
$u(x) = \cos(x)$, $u'(x) = -\sin(x)$
$v(x) = \sin(x)$, $v'(x) = \cos(x)$
$f = \frac{u}{v} => f' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{\sin^2(x)}$$

(weil $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$)

h.) Quotientenregel und Benutzung von Aufgabe 1, Teil f.) :
$u(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$
$u'(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ (siehe f.)
$v(x) = x^2$
$v'(x) = 2x$

$f' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\cos^2(x) - \sin^2(x)) \cdot x^2 - 2x \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)}{x^4} \\ &= \frac{x \cdot \cos^2(x) - x \cdot \sin^2(x) - 2\sin(x) \cdot \cos(x)}{x^3} \end{aligned}$$

i.) Quotientenregel:
$u(x) = 2 \cdot e^x \cdot \ln(x) + 3$

Nebenrechnung: Anwenden der Produktregel auf $e^x \cdot \ln(x)$ mit
$u = e^x$, $u' = e^x$, $v = \ln(x)$, $v' = \frac{1}{x}$ liefert

$$\frac{d}{dx}\ e^x \cdot \ln(x) = \frac{e^x}{x} + e^x \cdot \ln(x)$$

$u'(x) = 2 \cdot (\frac{e^x}{x} + e^x \cdot \ln(x))$
$v(x) = \sqrt{x} \qquad v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(\frac{e^x}{x} + e^x \cdot \ln(x)) \cdot \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (2e^x \cdot \ln(x) + 3)}{x} \\ &= 2 \cdot \frac{e^x}{x \cdot \sqrt{x}} + \frac{2e^x \cdot \ln(x)}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x\sqrt{x}} e^x \cdot \ln(x) + \frac{3}{2x\sqrt{x}} \end{aligned}$$

(weil $\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$)

Aufgabe 2

a.) Kettenregel:
$f(x) = F(u(x))$ mit $F(u) = \sin(u)$, $F'(u) = \cos(u)$, $u(x) = \frac{1}{x}$, $u'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$$f'(x) = u'(x) \cdot F'(u(x)) = -\frac{1}{x^2} \cdot \cos(\frac{1}{x})$$

b.) Ergebnis aus a.) wird benutzt und dann die Produktregel angewandt:
$u = t^2$, $u' = 2t$, $v = \sin(\frac{1}{t})$, $v' = -\frac{1}{t^2}\cos(\frac{1}{t})$

$$f'(t) = 2t \cdot \sin(\frac{1}{t}) + (-\frac{1}{t^2}\cos(\frac{1}{t})) \cdot t^2 = 2t \cdot \sin(\frac{1}{t}) - \cos(\frac{1}{t})$$

c.) Kettenregel:
$f(x) = F(u(x))$ mit $F(u) = e^u$, $F'(u) = e^u$,$u(x) = 2\sin(x) + 4$, $u'(x) = 2\cos(x)$

$$f'(x) = u'(x) \cdot F'(u(x)) = 2\cos(x) \cdot e^{2\sin(x)+4}$$

d.) Zunächst: Kettenregel um $\frac{d\sin(bx)}{dx}$ zu bestimmen: $\frac{d\sin(bx)}{dx} = b \cdot \cos(bx)$
(innere $\cdot$ äussere Ableitung).

Dann Kettenregel zur Ableitung von f:

$$f'(x) = a \cdot b \cdot \cos(bx) \cdot e^{a \cdot \sin(bx) + c}$$

($a \cdot b \cdot \cos(bx)$ ist innere Ableitung)

e.) $f(x) = -F(u(x))$ mit $F(u) = \ln(u)$, $F'(u) = \frac{1}{u}$, $u(x) = \cos(x)$, $u'(x) = -\sin(x)$

$$f'(x) = -(-\sin(x)) \cdot \frac{1}{\cos(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$$

f.) Kettenregel:
$f(t) = F(u(t))$ mit $F(u) = u^{20}$ $=>$ $F'(u) = 20 \cdot u^{19}$
$u(t) = 2t + 2$ $=>$ $u'(t) = 2$

$$f'(t) = 2 \cdot 20u^{19} = 2 \cdot 20 \cdot (2t+2)^{19} = 40(2t+2)^{19}$$

g.) Kettenregel:
$f(t) = F(u(t))$ mit $F(u) = 20^u$ $=>$ $F'(u) = \ln(20) \cdot 20^u$
$u(t) = 2t + 2$ $=>$ $u'(t) = 2$

$$f'(t) = 2 \cdot \ln(20) \cdot 20^{2t+2}$$

h.) Kettenregel: zur Berechnung von $\frac{d\sqrt{2x^2+\ln(x)}}{dx}$:

$\sqrt{2x^2 + \ln(x)} = F(u(x))$ mit
$F(u) = \sqrt{u}$, $F'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$, $u(x) = 2x^2 + \ln(x)$, $u'(x) = 4x + \frac{1}{x}$
$=>$ $\frac{d\sqrt{2x^2+\ln(x)}}{dx} = (4x + \frac{1}{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x^2+\ln(x)}}$

Ableitung mit Quotientenregel:
$u(x) = 1$, $u'(x) = 0$, $v(x) = a \cdot \sqrt{2x^2 + \ln(x)}$, $v'(x) = (4x + \frac{1}{x}) \cdot \frac{-a}{2\sqrt{2x^2+\ln(x)}}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2} = \frac{-(4x+\frac{1}{x}) \cdot \frac{a}{2\sqrt{2x^2+\ln(x)}}}{a^2 \cdot (2x^2 + \ln(x))} = \frac{-a \cdot (4x + \frac{1}{x})}{2a^2(2x^2 + \ln x)^{1,5}} \\ &= \frac{-(4x + \frac{1}{x})}{2a(2x^2 + \ln x)^{1,5}} \end{aligned}$$

Aufgabe 3

a.)

$$f(x) = x^{\tan(x)} = e^{\left((\ln x)^{\tan x}\right)} = e^{\tan x \cdot \ln x}$$
$$f'(x) = (\tan x \cdot \ln x)' \cdot e^{\tan x \cdot \ln x} = (\tan x \cdot \ln x)' \cdot x^{\tan(x)}$$

Ableiten von $\tan x \cdot \ln x$ nach der Produktregel:

$$(\tan x \cdot \ln x)' = \frac{d \tan(x)}{dx} \cdot \ln(x) + \frac{d \ln(x)}{dx} \cdot \tan(x) = \frac{\ln(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\tan(x)}{x}$$

Somit:

$$f'(x) = (\frac{\ln(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\tan(x)}{x}) \cdot x^{\tan(x)}$$

b.)

$$f(x) = (2x+3)^{\cos(3x)+4} = e^{\left((\ln(2x+3))^{\cos(3x)+4}\right)} = e^{(\cos(3x)+4)\cdot\ln(2x+3)}$$
$$f'(x) = ((\cos(3x)+4)\cdot\ln(2x+3))' \cdot e^{(\cos(3x)+4)\cdot\ln(2x+3)}$$
$$= ((\cos(3x)+4)\cdot\ln(2x+3))' \cdot (2x+3)^{\cos(3x)+4}$$

Ableiten von $(\cos(3x) + 4) \cdot \ln(2x + 3)$ nach der Produktregel (und für die Ableitung von $\cos(3x) + 4$ darin Kettenregel):

$$((\cos(3x)+4)\cdot\ln(2x+3))' = (\cos(3x)+4)'\cdot\ln(2x+3) + (\cos(3x)+4)\cdot(\ln(2x+3))'$$
$$= (-3\sin(3x))\cdot\ln(2x+3) + \frac{2\cdot(\cos(3x)+4)}{2x+3}$$

Somit:

$$f'(x) = \left((-3\sin(3x))\cdot\ln(2x+3) + \frac{2\cdot(\cos(3x)+4)}{2x+3}\right)\cdot(2x+3)^{\cos(3x)+4}$$

c.) Vorarbeit:

$$r(x) = x^{\sqrt{x}} = e^{\ln(x^{\sqrt{x}})} = e^{\sqrt{x}\cdot\ln x}$$

Daher:

$$r'(x) = (\sqrt{x}\cdot\ln x)' \cdot e^{\sqrt{x}\cdot\ln x} = (\sqrt{x}\cdot\ln x)' \cdot x^{\sqrt{x}}.$$

$(\sqrt{x} \cdot \ln x)'$ wird mit der Produktregel bestimmt:

$$(\sqrt{x}\cdot\ln x)' = (\sqrt{x})'\cdot\ln x + \sqrt{x}\cdot(\ln x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\ln(x) + \frac{\sqrt{x}}{x}$$

Somit:

$$r'(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\ln(x) + \frac{\sqrt{x}}{x}\right)\cdot x^{\sqrt{x}} = \frac{x^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\cdot(1 + \frac{\ln(x)}{2})$$

Ableiten der Funktion

$$\frac{e^x - x^{\sqrt{x}}}{x^2 - \sin(x)}$$

jetzt nach der Quotientenregel: $u(x) = e^x - x^{\sqrt{x}}$, $v(x) = x^2 - \sin(x)$

$$f'(x) = \frac{(e^x - \frac{x^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\cdot(1+\frac{\ln(x)}{2}))\cdot(x^2-\sin(x))}{(x^2-\sin(x))^2} - \frac{(2x-\cos(x))\cdot(e^x - x^{\sqrt{x}})}{(x^2-\sin(x))^2}$$

Aufgabe 4

a.) $i(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)/R$, wobei A, ω, φ , R fest sind.

$$i'(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi)/R$$

(Kettenregel: Innere Ableitung ω, äussere Ableitung $\cos(u)$, $\frac{A}{R}$ konstanter Faktor).

b.) $i(A) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)/R = A \cdot c$, wobei $c = \sin(\omega t + \varphi)/R$ hier eine Konstante ist. Also ist

$$\frac{di}{dA} = i'(A) = c = \sin(\omega t + \varphi)/R$$

c.) Sei $y = \omega t + \varphi$. Dann ist $i(y) = A \cdot \sin(y)/R$ mit den Konstanten A und R. Also ist

$$\frac{di}{d(\omega t + \varphi)} = \frac{di}{dy} = A \cdot \cos(y)/R = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)/R$$