Übungsblatt 10 - Musterlösungen

Technische Hochschule Mittelhessen, Mathematik 1 für EI, Prof. Dr. B. Just

Aufgabe 1

a.)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{1+\sin(x)}}{\sin(x^2-\frac{\pi}{6})}\right) = -2e$$

Denn Einsetzen von $x = 0$ in den Ausdruck liefert den Wert $-2e$ (mit $\sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$)

b.)

$$\lim_{x\to 0}(x\cdot\cot(x)) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x\cdot\cos(x)}{\sin(x)}\right)$$

Einsetzen von $x = 0$ liefert $\frac{0}{0}$, also l'Hospital (Produktregel im Zähler)

$$\lim_{x\to 0}(x\cdot\cot(x)) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{(x\cdot\cos(x))'}{(\sin(x))'}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1\cdot\cos(x)+x\cdot(-\sin(x))}{\cos(x)}\right) = 1$$

Der Wert 1 wird durch Einsetzen von $x = 0$ erhalten.

c.)

$$\lim_{x\to\pi}\left(\frac{e^{1+\sin(x)}}{x^2-2\pi}\right) = \frac{e}{\pi^2-2\pi} \qquad \text{(Wert } x=\pi \text{ eingesetzt)}$$

d.)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right) \qquad \text{Einsetzen von } x=0 \text{ liefert } \frac{0}{0}\text{, also l'Hospital}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x}{1}\right)$$

$$= e^0 = 1$$

e.)

$$\lim_{x\to\pi}\left(\frac{\sin(x)}{\sin(2x)}\right) \qquad \text{Einsetzen von } x=\pi \text{ liefert } \frac{0}{0}\text{, also l'Hospital, Kettenregel im Nenner}$$

$$= \lim_{x\to\pi}\left(\frac{\cos(x)}{2\cos(2x)}\right) \qquad \text{Einsetzen von } x=\pi$$

$$= \frac{\cos(\pi)}{2\cos(2\pi)} = \frac{-1}{2} = -0.5$$

f.)

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x^4+x^3}{e^x}) \qquad \text{Einsetzen von } x=\infty \text{ liefert } \frac{\infty}{\infty}, \text{ also l'Hospital}$$

$$= \lim_{x\to\infty}(\frac{4x^3+3x^2}{e^x}) \qquad \text{Einsetzen von } x=\infty \text{ liefert } \frac{\infty}{\infty}, \text{ also l'Hospital}$$

$$= \lim_{x\to\infty}(\frac{12x^2+6x}{e^x}) \qquad \text{Einsetzen von } x=\infty \text{ liefert } \frac{\infty}{\infty}, \text{ also l'Hospital}$$

$$= \lim_{x\to\infty}(\frac{24x+6}{e^x}) \qquad \text{Einsetzen von } x=\infty \text{ liefert } \frac{\infty}{\infty}, \text{ also l'Hospital}$$

$$= \lim_{x\to\infty}(\frac{24}{e^x}) \qquad \text{Einsetzen von } x=\infty \text{ liefert } \frac{24}{\infty}$$

$$= 0$$

Aufgabe 2

a.) Definitionsbereich: $\ln(x)$ ist definiert für $(0,\infty)$.
Der Nenner $1+\ln(x)$ ist Null für $1=-\ln(x)$, also bei $e^1 = e^{-\ln(x)} = (e^{\ln(x)})^{-1} = x^{-1}$, also bei $x=\frac{1}{e}$
Somit ist der Definitionsbereich $(0,\frac{1}{e})\cup(\frac{1}{e},\infty)$

b.)

$$\lim_{x\to(\frac{1}{e})^-}(\frac{x}{1+\ln(x)}) = \frac{(\frac{1}{e})^-}{1+(-1)^-} = \frac{\frac{1}{e}}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to(\frac{1}{e})^+}(\frac{x}{1+\ln(x)}) = \frac{(\frac{1}{e})^+}{1+(-1)^+} = \frac{\frac{1}{e}}{0^+} = +\infty$$

c.)

$$f(x) = \frac{x}{1+\ln(x)} \qquad \text{Quotientenregel mit } u=x,\ v=1+\ln(x),\ u'=1,\ v'=\frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{u'\cdot v - v'\cdot u}{v^2} = \frac{1+\ln(x)-1}{(1+\ln(x))^2} = \frac{\ln(x)}{(1+\ln(x))^2}$$

$f''(x)$: Quotientregel mit
$u=\ln(x)$, $u'=\frac{1}{x}$, $v=(1+\ln(x))^2$, $v'=2\cdot\frac{1}{x}\cdot(1+\ln(x)) = \frac{2}{x}+\frac{2}{x}\ln(x)$
(bei v' wurde die Kettenregel benutzt)

$$f''(x) = \frac{u'\cdot v - v'\cdot u}{v^2} = \frac{\frac{1}{x}(1+\ln(x))^2 - \frac{2\ln(x)}{x} - \frac{2}{x}(\ln(x))^2}{(1+\ln(x))^4}$$

$$= \frac{(1+\ln(x))^2 - 2\ln(x) - 2(\ln(x))^2}{x\cdot(1+\ln(x))^4}$$

$$= \frac{(1+\ln(x))^2 - 2\ln(x)\cdot(1+\ln(x))}{x\cdot(1+\ln(x))^4}$$

$$= \frac{(1+\ln(x)) - 2\ln(x)}{x\cdot(1+\ln(x))^3}$$

$$= \frac{1-\ln(x)}{x\cdot(1+\ln(x))^3}$$

d.) Extremwerte: $f'(x) = 0 => \frac{\ln(x)}{(1+\ln(x))^2} = 0$
$=> \ln(x) = 0$
$=> x = 1$
$f''(1) = \frac{1-0}{1 \cdot (1+0)^3} = 1 > 0$ also relatives Minimum bei x=1 $\qquad f(1) = \frac{1}{1+\ln(1)} = 1$

e.)

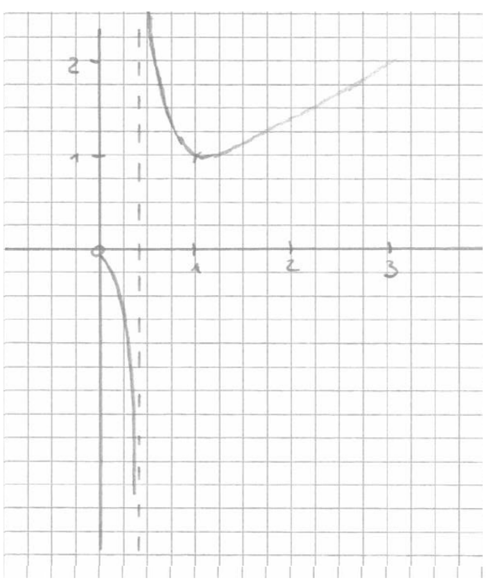
$\lim_{x \to 0^+} f(x)$ (nur rechtsseitiger Grenzwert möglich, Funktion links nicht definiert)

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{x}{1+\ln(x)}\right) = \frac{0^+}{1-\infty} = 0$$

$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x}{1+\ln(x)}\right)$ formales Einsetzen liefert $\frac{\infty}{\infty}$, also l'Hospital

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{(\frac{1}{x})}\right) = \lim_{x \to \infty} (x) = \infty$$

f.)



Aufgabe 3

a.) Definitionsbereich $= \mathbb{R}$
Pole und Lücken gibt es nicht, Nenner stets ≥ 1, d.h. nie Null

b.)

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

$$f'(x) \text{ mit Quotientenregel: } u = x,\ u' = 1,\ v = x^2+1,\ v' = 2x$$

$$f'(x) = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x) \text{ mit Quotientenregel: } u = 1-x^2,\ u' = -2x,\ v = (x^2+1)^2$$

$$\text{Kettenregel: } v' = 2(x^2+1) \cdot 2x = 4x \cdot (x^2+1)$$

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2+1)^2 - 4x(x^2+1) \cdot (1-x)^2}{(x^2+1)^4}$$

Kürzen durch x^2+1

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2+1) - 4x \cdot (1-x)^2}{(x^2+1)^3} = \frac{-2x^3-2x-4x+4x^3}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(x) = \frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}$$

$$f'''(x) \text{mit Quotientenregel } u = 2x^3-6x,\ u' = 6x^2-6,\ v = (x^2+1)^3$$

$$v' = 3(x^2+1)^2 \cdot 2x = 6x(x^2+1)^2$$

$$f'''(x) = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{(x^2+1)^6}$$

$$f'''(x) = \frac{(6x^2-6) \cdot (x^2+1)^3 - 6x(x^2+1)^2 \cdot (2x^3-6x)}{(x^2+1)^6}$$

kürzen durch $(x^2+1)^2$

$$f'''(x) = \frac{(6x^2-6) \cdot (x^2+1) - 6x(2x^3-6x)}{(x^2+1)^4}$$

$$f'''(x) = \frac{6x^4-6-12x^4+36x^2}{(x^2+1)^4}$$

$$f'''(x) = \frac{-6(x^4-6x^2+1)}{(x^2+1)^4}$$

c.)
1.)Extremwerte: $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0$
$\Rightarrow 1-x^2 = 0 \Rightarrow 1 = x^2 \Rightarrow x = \pm 1$

Zweite Ableitung bilden, um zu entscheiden ob Maximum oder Minimum:

$$f''(x) = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(1) = \frac{2-6}{2^3} = -\frac{1}{2}$$

$-\frac{1}{2} < 0 =>$ relatives Maximum bei $x = 1$, $f(1) = \frac{1}{2}$

$$f''(-1) = \frac{-2+6}{2^3} = \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2} > 0 =>$ relatives Minimum bei $x = -1$, $f(-1) = -\frac{1}{2}$

2.)Wendepunkte: $f''(x) = 0 => \frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3} = 0$

$=> 2x^3 - 6x = 0$
$=> 2x(x^2 - 3) = 0$
$=> x_1 = 0 \qquad x_2 = -\sqrt{3} \qquad x_3 = \sqrt{3}$
sind Wendepunkte, falls $f'''(x_{1|2|3}) \neq 0$

$$f'''(0) = -6 \neq 0$$

$$f'''(\sqrt{3}) = \frac{-6 \cdot (\sqrt{3}^4 - 6\sqrt{3}^2 + 1)}{(\sqrt{3}^2+1)^4} = \frac{-6 \cdot (9 - 18 + 1)}{4^4} = \frac{48}{256} \neq 0$$

$$f'''(-\sqrt{3}) = \frac{48}{256} \neq 0$$

$=>$Wendepunkte bei $0, \pm\sqrt{3}$, d.h, bei $0, \pm 1,732....$

d.) Nullstelle $f(x) = 0 => \frac{x}{x^2+1} = 0 => x = 0$

e.)

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x}{x^2+1}\right) \qquad \text{Einsetzen liefert } \frac{-\infty}{\infty}\text{, also l'Hospital}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2x}\right) = 0$$

f.)