Übungsblatt 3 - Musterlösung

Technische Hochschule Mittelhessen, Fachbereich MNI, Diskrete Mathematik, Prof. Dr. B. Just

Aufgabe 1

$A = \{1, 2, 3, ..., 10\}, B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, ...\}$
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$

a.) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 16, ...\}$

b.) $A \cup \mathbb{N} = \mathbb{N}$

c.) $A \cap B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

d.) $A \cap \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

e.) $\mathbb{N} \backslash A = \{11, 12, 13, 14, ...\}$

f.) $\mathbb{N} \backslash (A \cup B) = \{11, 13, 15, 17, 19, ...\}$

Aufgabe 2

a.) Die Potenzmenge von $M = \{1, 2, 3, 4\}$ besteht aus allen Teilmengen von $\{1, 2, 3, 4\}$. Eine Teilmenge T ist eindeutig bestimmt durch die 4 Informationen
$1 \in T$ (ja/nein), $2 \in T$ (ja/nein)
$3 \in T$ (ja/nein), $4 \in T$ (ja/nein).
Man erhält:

$1 \in T$	$2 \in T$	$3 \in T$	$4 \in T$	Teilmenge
0	0	0	0	$\{ \}$
0	0	0	1	$\{4\}$
0	0	1	0	$\{3\}$
0	0	1	1	$\{3, 4\}$
0	1	0	0	$\{2\}$
0	1	0	1	$\{2, 4\}$
0	1	1	0	$\{2, 3\}$
0	1	1	1	$\{2, 3, 4\}$
1	0	0	0	$\{1\}$
1	0	0	1	$\{1, 4\}$
1	0	1	0	$\{1, 3\}$
1	0	1	1	$\{1, 3, 4\}$
1	1	0	0	$\{1, 2\}$
1	1	0	1	$\{1, 2, 4\}$
1	1	1	0	$\{1, 2, 3\}$
1	1	1	1	$\{1, 2, 3, 4\}$

Die Menge aller Mengen der Spalte "Teilmenge" ist die Potenzmenge von M (die Reihenfolge ist egal).

b.) Die Potenzmenge hat 16 Elemente.
Also ist |P|= 16.

Aufgabe 3

a.) $A \cup (B \cap C) = \{x : x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)\}$

(per Definition)

$= \{x : (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)\}$

(Distributivgesetz $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ für boolesche Variable a, b, c angewandt auf $(x \in A)$ als a, $(x \in B)$ als b und $(x \in C)$ als c)

$= (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(per Definition).

b.) $A \cap (B \cup C) = \{x : x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)\}$

(per Definition)

$= \{x : (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)\}$

(Distributivgesetz $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ für boolesche Variable a, b, c angewandt auf $(x \in A)$ als a, $(x \in B)$ als b und $(x \in C)$ als c)

$= (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(per Definition).

Aufgabe 4

Die Menge besteht aus allen $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \{0, 1\}^4$,
für die $x_1 \neq 1$ und $x_4 \neq 0$, d.h. für die $x_1 = 0$ und $x_4 = 1$.
Sie ist also
$\{(0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 1)\}$.

Aufgabe 5

StraßeNass	Regnete	Autowäsche	kommt vor
0	0	0	ja
0	0	1	nein, denn Autowäsche $\Rightarrow$ StraßeNass
0	1	0	nein, denn Regnete $\Rightarrow$ StraßeNass
0	1	1	nein, denn Autowäsche $\wedge$ Regnete $\Rightarrow$ StraßeNass
1	0	0	nein, denn StraßeNass $\Leftrightarrow$ (Regnete $\vee$ Autowäsche)
1	0	1	ja
1	1	0	ja
1	1	1	ja

In den Fällen mit "ja" erfüllt die Belegung der Variablen die Äquivalenz
StraßeNass $\Leftrightarrow$ (Regnete $\vee$ Autowäsche).

Bemerkung zur Brücke von der mathematischen Logik in die Programmierung: "StraßeNass", "Regnete" und "Autowäsche" sind hier Variablennamen von booleschen Variablen, die Eigenschaften symbolisieren. In Programmen sind boolesche Variable oft Steuerungsvariablen, in den Datenbank-Tabellen bezeichnen sie die entsprechenden Zustände eines Datensatzes. Solche Variablen sind z.B. "BeitragGezahlt", "LeistungsfallEingetreten" etc..

Aufgabe 6

a.) Zu zeigen: n gerade $\Leftrightarrow n^2$ gerade.

"$\Rightarrow$" : Sei n gerade $\Rightarrow \exists\, m \in \mathbb{N} : n = 2 \cdot m$
$\Rightarrow n^2 = (2 \cdot m)^2 = 4 \cdot m^2$
$\Rightarrow n^2$ gerade

"$\Leftarrow$" : Sei n^2 gerade $\Rightarrow \exists\, m \in \mathbb{N} : n^2 = 2 \cdot m$
$\Rightarrow n \cdot n = 2 \cdot m$
$\Rightarrow 2$ teilt n (denn wenn $a \cdot b$ gerade ist, ist entweder a oder b oder beide gerade. Das wird hier angewandt auf $a = b = n$).
$\Rightarrow n$ gerade. q.e.d.

b.) n^2 durch 4 teilbar $\overset{?}{\Rightarrow}$ n durch 4 teilbar:
Die Folgerung ist falsch. So ist z.B. für $n = 2$ zwar n^2 durch 4 teilbar, aber n nicht.

Aufgabe 7

Wir zeigen, dass das Rechteck mit drei fehlenden Ecken nicht mit 1×3 - Rechtecken gepflastert werden kann.

Dazu wird das vollständige Rechteck wird wie folgt mit den Farben 1, 2 und 3 gefärbt:

1	2	3	1	2	3	1	2	3
2	3	1	2	3	1	2	3	1
3	1	2	3	1	2	3	1	2
1	2	3	1	2	3	1	2	3

Es gibt je 12 mal die 1, 2 und 3. Wenn drei Ecken fehlen, verbleiben 12 mal die 2, aber weniger als 12 mal die 1 und 3.

Jedes 1×3 - Rechteck einer möglichen Pflasterung überdeckt aber genau eine 1, 2 und 3. Also kann das Rechteck, bei dem 3 Ecken fehlen, nicht mit 1×3 - Rechtecken gepflastert werden. Q.e.d.