

Übungsblatt 5

Technische Hochschule Mittelhessen, Fachbereich MNI, Diskrete Mathematik, Prof. Dr. B. Just

Aufgabe 1

Bitte zeigen Sie die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion.

- Für $n \geq 1$ ist $\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2$.
- Für $n \geq 1$ ist $3^n - 3$ durch 6 teilbar.
- Für $n \geq 3$ ist die Innenwinkelsumme im ebenen n -Eck $(n - 2) \cdot 180^\circ$. (Dass die Innenwinkelsumme im Dreieck 180° ist, kann vorausgesetzt werden).
- Für $n \geq 2$ gilt: Wenn sich n Personen treffen, und jeder gibt jedem die Hand, so werden insgesamt $n \cdot (n - 1)/2$ Handshakes ausgeführt.

Aufgabe 2

Bitte berechnen Sie:

- $13 \cdot 7 \pmod{3}$ b.) $12 - 5 + 184 \cdot 17 \pmod{5}$
- $a^2 - (a + b)^2 \pmod{b}$ für $a, b \in \mathbb{N}$ d.) $17 \cdot 19 \pmod{18}$ e.) $15^{20} \pmod{16}$
- Bitte beweisen Sie für $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ mit $a \equiv b \pmod{m}$, $c \equiv d \pmod{m}$:
Es gilt $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}$.
(Wer keinen Ansatz findet, überzeuge sich davon anhand einiger Beispiele mit dreistelligen krummen Zahlen a, b, c, d , einem zweistelligen Modul m und einem Taschenrechner ;-).

Aufgabe 3

Die Modulrechnung wird angewandt, um zu prüfen, ob Zahlen richtig übertragen wurden. Wenn ein Sender die s -stellige Dezimalzahl $n = \sum_{i=0}^{s-1} a_i \cdot 10^i$ übertragen will, sendet er zusätzlich die Prüfziffer

$$p = - \sum_{i=0}^{s-1} (i + 2) \cdot a_i \pmod{(s + 2)}. \text{ Es gilt dann } p + \sum_{i=0}^{s-1} (i + 2) \cdot a_i \equiv 0 \pmod{(s + 2)}.$$

Der Empfänger berechnet dann für die Zahl $n' = \sum_{i=0}^{s-1} a'_i \cdot 10^i$ und den Wert p' , die er erhalten hat, den Wert $p' + \sum_{i=0}^{s-1} (i + 2) \cdot a'_i \pmod{(s + 2)}$. Ergibt dieser Wert nicht Null, ist ein Übertragungsfehler aufgetreten (die Umkehrung gilt leider nicht, Fehler können sich auch aufheben).

Bitte überprüfen Sie für die folgenden 5-stelligen Zahlen, ob die jeweilige Prüfziffer korrekt ist:

- 24381 - 1 b.) 23481 - 1

(Ein Beispiel für $s = 9$ ist die ISBN-Nummer, findet sich in Teschl/Teschl).

Aufgabe 4

Bitte erstellen Sie die folgenden Berechnungstableaus für modulare Addition und Multiplikation:

- $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}, +)$ b.) $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}, \cdot)$
- In den Zeilen bzw. Spalten mit welchen Eingangszahlen kommt bei $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}, \cdot)$ jede Zahl aus $\{0, \dots, 8\}$ genau einmal vor?

Viel Spass und Erfolg!