Übungsblatt 10 - Musterlösungen

Technische Hochschule Mittelhessen, Fachbereich MNI, Diskrete Mathematik, Prof. Dr. B. Just

Aufgabe 1

a.)
Es gibt $26^3 = 26 \cdot 26 \cdot 26 = 17576$ Möglichkeiten

b.)
Sei A die Menge der $0-1-$Folgen der Länge 10, die mit zwei Einsen beginnen, und B die Menge der $0-1-$Folgen der Länge 10, die mit zwei Einsen enden.
Gesucht ist $|A \cup B|$.
Es ist $|A| = |B| = 2^8$, weil jeweils die verbleibenden 8 Positionen frei wählbar sind.
Außerdem ist $A \cap B$ die Menge der $0-1-$Folgen der Länge 10, die mit zwei Einsen beginnen <u>und</u> enden.
Es ist $|A \cap B| = 2^6$, weil die 6 Positionen in der Mitte frei wählbar sind.
Somit:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 2^8 + 2^8 - 2^6 = 256 + 256 - 64 = 448.$$

Aufgabe 2

a).
Es gibt $26^8 = (26^4)^2 = 456976^2 \approx 200.000.000.000$ solcher Passwörter.

b.)
Um aus 8 Positionen 2 auszuwählen, gibt es $\binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28$ Möglichkeiten.

c.)
Für die beiden Ziffern gibt es $10^2 = 100$ Möglichkeiten.
Für die 6 Buchstaben $26^6 = 308.915.776$ Möglichkeiten
Insgesamt also $10^2 \cdot 26^6 = 30.891.577.600$ Möglichkeiten

d.)
Wenn die Position der Ziffern feststeht, gibt es laut c.) $10^2 \cdot 26^6$ Möglichkeiten
Nach b.) gibt es 28 Möglichkeiten für die Position der Ziffern. Insgesamt also $28 \cdot 10^2 \cdot 26^6$
Möglichkeiten (das sind 864.964.172.800)

Aufgabe 3

a.) Es gibt $n!$ Möglichkeiten, die Elemente anzuordnen.

b.) Es gibt 2^n Teilmengen.

c.)
Für kleine n gibt die folgende Tabelle Auskunft:

n	$n!$ Möglichkeiten der Anordnung	2^nAnzahl Teilmengen	wer ist größer?
0	1	1	beide gleich
1	1	2	# Teilmengen
2	2	4	# Teilmengen
3	6	8	# Teilmengen
4	24	16	# Anordnungen

Behauptung: Für $n \geq 4$ ist die Zahl der Anordnungen größer.

Beweis durch vollständige Induktion:

$n = 4$: zu zeigen: $4! > 2^4$.
Das gilt wegen $24 > 16$.

$n \to n+1$:

Induktionsvorraussetzung: $n! > 2^n$.

zu zeigen: $(n+1)! > 2^{n+1}$

Dies gilt wegen:

$$\begin{array}{rccc}
(n+1)! & = & n! \cdot (n+1) & \\
 & > & 2^n \cdot (n+1) & \text{(laut Ind. Vorraussetzung)} \\
 & > & 2^n \cdot 2 & (\text{weil } n+1 > 2) \\
 & = & 2^{n+1} & \text{qed.}
\end{array}$$

Aufgabe 4

a) Gefragt ist nach der Zahl der Möglichkeiten, aus den 93 intakten 5 und aus den 7 defekten 3 Werkstücke auszuwählen.

Diese ist

$$\binom{93}{5} \cdot \binom{7}{3} = \frac{93 \cdot 92 \cdot 91 \cdot 90 \cdot 89 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 1.818.994.905$$

b.) Aus $n = 7$ werden $k = 5$ ausgewählt, wobei zurückgelegt wird (d.h, Elemente können mehrfach ausgewählt werden) und die Reihenfolge unwichtig ist.

Dafür gibt es

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{7+5-1}{5} = \binom{11}{5} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 462 \text{ Möglichkeiten}$$

c.) Für jede der 10 Positionen im Ergebnis gibt es 3 Möglichkeiten, insgesamt also $3^{10} = 59049$.

d.) Soviele, wie es möglich ist 5 Positionen (für die schwarzen Ergebnisse) aus 10 auszuwählen, also

$$\binom{10}{5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 252.$$

e.) Eine Menge mit 20 Elementen hat $2^{20} = 1.048.576$ Teilmengen.

f.) Es gibt $3^9 = 19683$ Möglichkeiten (Wörter aus den Buchstaben $\{0, 1, 2\}$ mit Länge 9).

g.) Für Spieler 1 gibt es $\binom{32}{10}$ Möglichkeiten.

Für Spieler 2 dann noch $\binom{22}{10}$ Möglichkeiten und für Spieler 3 dann noch $\binom{12}{10}$ Möglichkeiten. Dann sind auch die zwei Karten auf dem Tisch definiert.

Insgesamt gibt es also

$$\binom{32}{10} \cdot \binom{22}{10} \cdot \binom{12}{10} \text{ Möglichkeiten.}$$

Aufgabe 5

a.)

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\
&= \frac{(n-1)! \cdot k}{(k-1)! \cdot k \cdot (n-k)!} + \frac{(n-1)! \cdot (n-k)}{k! \cdot (n-k-1)! \cdot (n-k)} \\
&= \frac{(n-1)! \cdot k + (n-1)! \cdot (n-k)}{k! \cdot (n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!(k+n-k)}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}
\end{aligned}$$

b.)

Die Zahl der Möglichkeiten, aus n Elementen k auszuwählen, ist:

Die Zahl der Möglichkeiten, aus den ersten $n-1$ Elemente $k-1$ auszuwählen und das letzte zu nehmen

plus

die Zahl der Möglichkeiten, aus den ersten $n-1$ Elementen k auszuwählen und das letzte nicht zu nehmen.

Also ist

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Aufgabe 6

Es ist $(x+y)^6 = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} \cdot x^k y^{6-k}$

Die Binomialkoeffizienten für $n = 6$ erhält man aus dem Pasacl'schen Dreieck:

n	Binomialkoeffizienten												
0							1						
1						1		1					
2					1		2		1				
3				1		3		3		1			
4			1		4		6		4		1		
5		1		5		10		10		5		1	
6	1		6		15		20		15		6		1

Also ist

$(x+y)^6 = y^6 + 6xy^5 + 15x^2y^4 + 20x^3y^3 + 15x^4y^2 + 6x^5y + x^6$