Übungsblatt 3

Technische Hochschule Mittelhessen, Mathematik 2 für EI, Prof. Dr. B. Just

Aufgabe 1

a.) Bitte bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) = -x^2y^2 - x^2 - y^2 - \frac{z^3}{3} + \frac{3z^2}{2} - 2z - 1 \ .$$

b.) Bitte bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = xy - 27/x + 27/y$.

Hinweis: Wer möchte, überzeugt sich auf dem Flächentool im Internet ... da muss man ziemlich genau hinschauen :-) .

c.) Bitte bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x, y, z) = x^2 + y + z$, unter der Nebenbedingung $x^2 - y^2 - z^2 = 1$.

Hinweis: Zurückführen auf ein Extremwertproblem in zwei Variablen.

d.) Konstruieren Sie bitte selbst eine Funktion von zwei Variablen, die Extremwerte besitzt. Kombinationen aus sin und cos sind geeignet :-). Bitte visualisieren Sie die Funktion, z.B. auf dem Flächentool im Internet. Dann weisen Sie rechnerisch nach, dass die gefundenen Extrema tatsächlich die Bedingungen erfüllen: Alle partiellen Ableitungen sind Null, und die linken oberen Determinanten der Hesse-Matrix sind bei einem lokalen Minimun alle (beide) positiv, bei einem lokalen Maximum negativ beginnend alternierend.

Aufgabe 2

Bitte berechnen Sie für die folgenden Funktionen den Gradienten jeweils am angegebenen Punkt P.

a.) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 \cdot y \cdot \ln(y),\ P = (3, e)$

b.) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, t) = \sin(x) + \sin(t),\ P = (\pi/2, \pi)$

c.) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, f(x, y, z, t) = \sin(x) \cdot \cos(y) + z^2 \cdot t + e^t,\ P = (1, 2, 3, 2)$

... auf der Rückseite geht es weiter :)

Aufgabe 3

(Warmlaufen für Mehrfachintegrale :-))

a.) Bitte berechnen Sie das folgende Integral mit den Methoden aus Mathe1 - dabei ist zu beachten, dass hier nach y integriert wird, x also wie eine Konstante zu behandeln ist:

$$\int_{y=0}^{x} 2xy \; dy.$$

b.) Bitte berechnen Sie nun das folgende Doppelintegral:

$$\int_{x=1}^{2} \int_{y=0}^{x} 2xy \; dy \; dx$$

Wie? Von innen nach außen, d.h., indem Sie wie folgt klammern:

$$\int_{x=1}^{2} \left(\int_{y=0}^{x} 2xy \; dy \right) dx$$

(Der Ausdruck in der Klammer wurde in Teil a.) bereits ausgerechnet).

Aufgabe 4

Bitte berechnen Sie das folgende Dreifachintegral (wie immer bei Integralen von innen nach außen), jeweils unter Angabe mindestens eines Zwischenschritts für jede der drei Integrationen (es geht auch ganz ohne Taschenrechner ;-)):

$$\int_{x=0}^{4} \int_{y=0}^{4-x} \int_{z=0}^{4-y-x} 60 \; z^2 \; dz \; dy \; dx$$

Viel Spass und Erfolg!