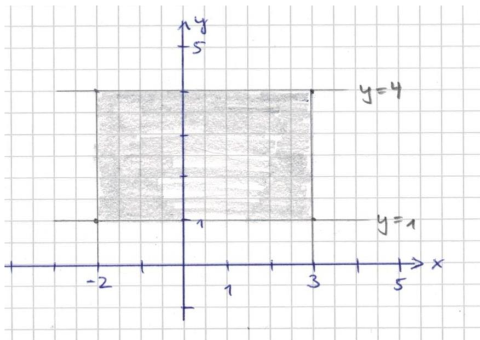
Übungsblatt 4 - -Musterlösung

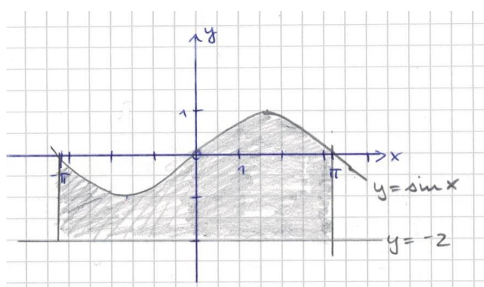
Technische Hochschule Mittelhessen, Mathematik 2 für EI, Prof. Dr. B. Just

Aufgabe 1

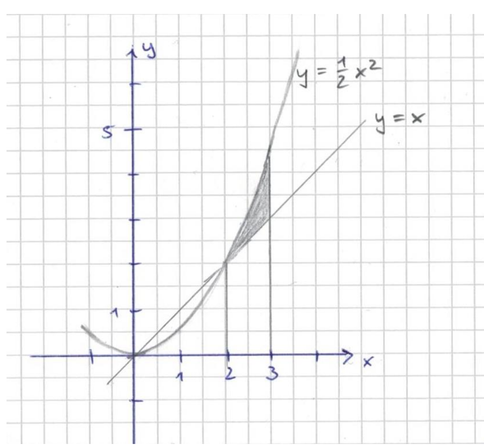
a.) Der x-Wert liegt zwischen -2 und 3, der y-Wert zwischen 1 und 4. Insgesamt ergibt sich folgendes Gebiet in der $x-y-$Ebene:



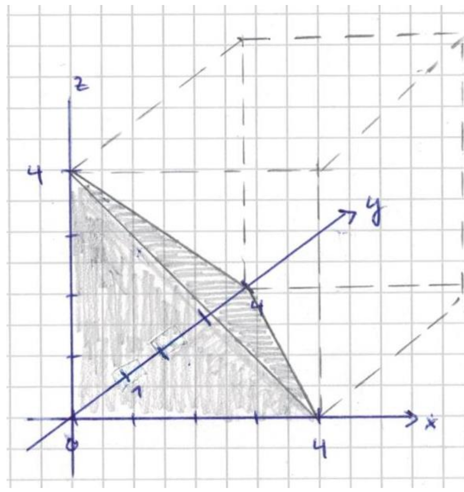
b.) Der x-Wert liegt zwischen $-\pi$ und π, der y-Wert für jedes feste x dann zwischen -2 und $\sin x$. Insgesamt ergibt sich folgendes Gebiet in der $x-y-$Ebene:



c.) Der x-Wert liegt zwischen 2 und 3, der y-Wert für jedes feste x dann zwischen x und $x^2/2$. Insgesamt ergibt sich folgendes Gebiet in der $x-y-$Ebene:



d.) Das Gebiet liegt im $\mathbb{R}^3$. Der x-Wert liegt zwischen 0 und 4, der y-Wert für jedes feste x dann zwischen 0 und $4-x$, und der z-Wert dann für jedes feste Paar (x, y) zwischen 0 und $4-x-y$. Insgesamt ergibt sich im Raum ein Tetraeder mit den Eckpunkten $(0,0,0), (4,0,0), (0,4,0)$ und $(0,0,4)$:



e.) Hier gibt es keine Musterlösung :-)

Aufgabe 2

a.)
A ist ein Dreieck zwischen den Punkten $(0,0),(1,0)$ und $(0,1)$.
D.h., $x_u = 0, x_o = 1$ und für festes x ist $y_u(x) = 0$ und $y_o(x) = x$.

$$\iint\limits_{(A)} f \; dA = \int_{x_u=0}^{x_o=1} \int_{y_u=0}^{y_o=x} x \cdot \sin(y) \; dy \; dx$$

$$= \int_0^1 \Big[-x \cdot \cos(y) \Big]_0^x \; dx$$

$$= \int_0^1 \Big[-x \cdot \cos(x) + x \Big] \; dx$$

$$= \Big[-\cos(x) - x \cdot \sin(x) + \frac{x^2}{2} \Big]_0^1$$

$$= -\cos(1) - \sin(1) + \frac{1}{2} + \cos(0)$$

$$\approx 0,11826 \text{ in Bogenmass, bzw. } \approx 0,000038 \text{ in Gradmass.}$$

Benutzt wurde $\cos(0) = 1$ und $\int x \cdot \cos(x) \; dx = \cos(x) + x \cdot \sin(x) + C$

b.)
Hier ist $x_u = 0,\; x_o = 1$ und für ein festes x ist $y_u(x) = 0$ und $y_o(x) = x^2$. Also ist

$$\iint\limits_{(A)} f \; dA = \int_{x_u=0}^{x_o=1} \int_{y_u(x)=0}^{y_o(x)=x^2} x \cdot \sin(y) \; dy \; dx$$

$$= \int_0^1 \Big[-x \cdot \cos(y) \Big]_0^{x^2} \; dx$$

$$= \int_0^1 \Big(-x \cdot \cos(x^2) + x \Big) \; dx$$

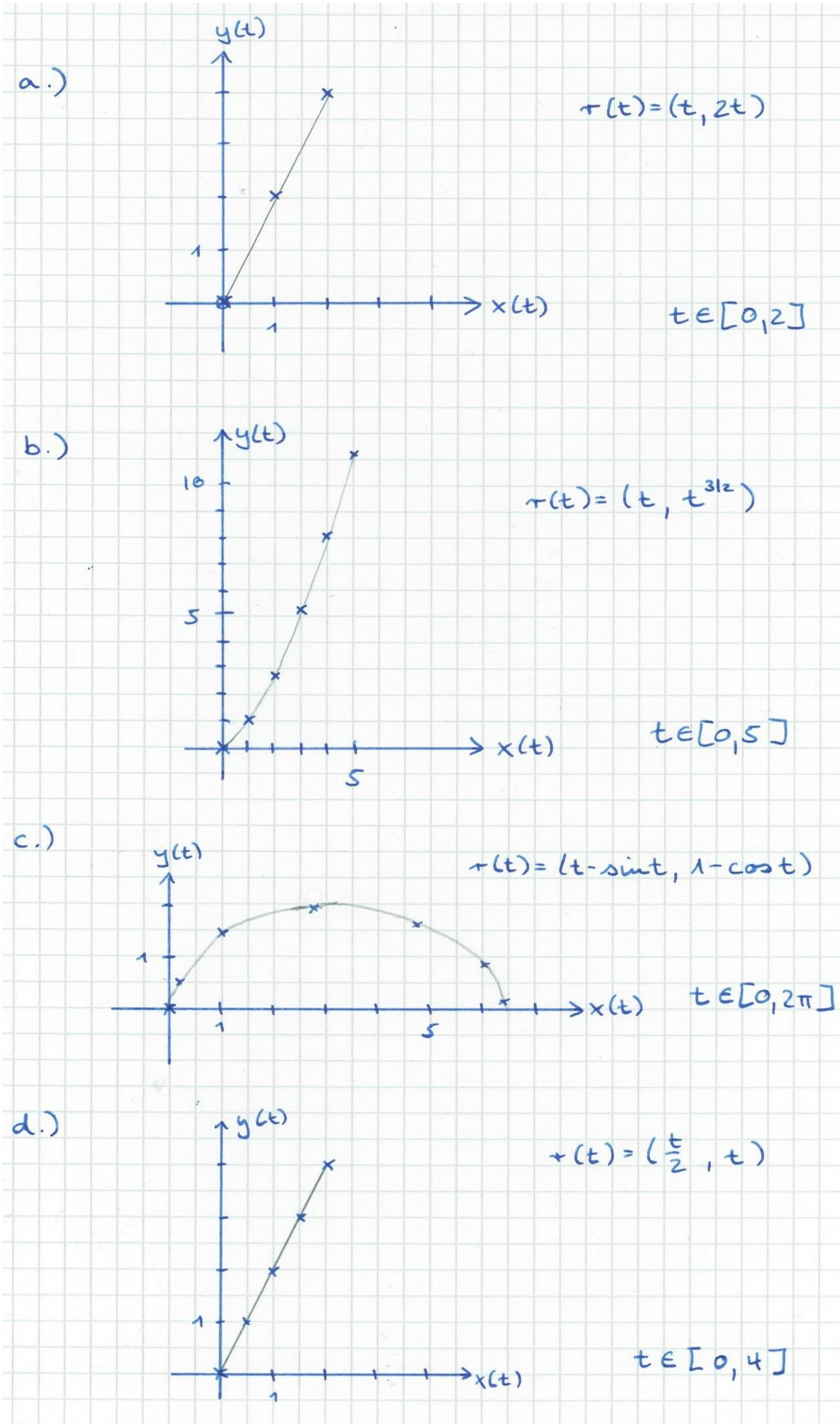
$$= [-0.5 \;\sin(x^2) + 0.5 \; x^2]_0^1$$

$$= -\frac{1}{2} \sin(1) + \frac{1}{2}$$

$$\approx 0.07926 \text{ (im Bogenmaß).}$$

Benutzt wurde $\int x \cdot \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \sin(x^2)$

Aufgabe 3



e.) Unterschied zwischen a. und d.: Kurve ist die gleiche, sie wird aber in a. doppelt so schnell durchlaufen wie in d. .

Aufgabe 4

a.)

$r(t) = (t, 2t) \Rightarrow \dot{r}(t) = (1, 2) \Rightarrow |\dot{r}(t)| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

Bogenlänge: $\int\limits_0^2 \sqrt{5}\ dt = [\sqrt{5}t]_0^2 = 2\sqrt{5} \approx 4,47$

b.)

$r(t) = (t, t^{\frac{3}{2}}) \Rightarrow \dot{r}(t) = (1, \frac{3}{2}\sqrt{t})$

$|\dot{r}(t)| = \sqrt{1 + (\frac{3}{2}\sqrt{t})^2} = \sqrt{1 + \frac{9}{4}t}$

Bogenlänge: $\int\limits_0^a |\dot{r}(t)|\ dt = \int\limits_0^a \sqrt{1 + \frac{9}{4}t}\ dt$

$= [\frac{1}{27}(9t + 4)^{\frac{3}{2}}]_0^a = \frac{1}{27}(9a + 4)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27}$

c.)

$r(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t)) \Rightarrow \dot{r}(t) = (1 - \cos(t), \sin(t))$

$|\dot{r}(t)| = \sqrt{(1 - \cos(t))^2 + (\sin(t))^2}$

$= \sqrt{1 - 2\cos(t) + (\cos(t))^2 + (\sin(t))^2}$

$= \sqrt{2 - 2\cos(t)} = \sqrt{2 \cdot (1 - \cos(t))}$

$= \sqrt{2 \cdot 2 \cdot \sin^2(\frac{t}{2})} = |2 \cdot \sin(\frac{t}{2})|$

Bogenlänge: $\int\limits_0^{2\pi} |\dot{r}(t)|\ dt = \int\limits_0^{2\pi} |2 \cdot \sin(\frac{t}{2})|\ dt$

Weil im Intervall $[0, 2\pi]$ gilt $\sin(\frac{t}{2}) > 0 :$

Bogenlänge $= \int\limits_0^{2\pi} 2 \cdot \sin(\frac{t}{2}) dt = [-4\cos(\frac{t}{2})]_0^{2\pi}$

$-4 \cdot \cos\pi + 4 \cdot \cos(0) = 4 + 4 = 8$

Aufgabe 5

a.)

$r : [0,1] \to \mathbb{R}^2$

$r(t) = (1-t) \cdot (1,2) + t \cdot (10,2)$

$= (1 - t + 10\ t\ ,\ 2 \cdot (1-t) + 2t)$

$= (1 + 9\ t\ ,\ 2)$

(Bem: Der gerade Weg erfüllt überall y=2)

b.)

$r : [0,1] \to \mathbb{R}^2$

$r(t) = (1-t) \cdot (a,b) + t \cdot (c,d)$

$= ((1-t) \cdot a + tc\ ,\ (1-t) \cdot b + td)$

$= (a - ta + tc\ ,\ b - bt + td)$

c.)

$r : [0,1] \to \mathbb{R}^3$

$r(t) = (1-t) \cdot (0,0,0) + t \cdot (1,2,4) = (t, 2t, 4t)$

d.)

$r : [0,1] \to \mathbb{R}^3$

$r(t) = (1-t) \cdot (1,2,4) + t \cdot (0,0,0)$

$= (1 - t\ ,\ 2 - 2t\ ,\ 4 - 4t)$