

# Übungsblatt 6 - Musterlösung

TH Mittelhessen, Mathematik 2 für EI, Prof. Dr. B. Just

## Aufgabe 1

a.)

$$F(x, y) = (xy, x^2y^2) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$$

Wenn  $F(x, y)$  ein Potentialfeld ist, so gibt es eine Potentialfunktion  $\Phi(x, y)$  mit:

$$\int F_1(x, y) dx = \Phi(x, y) \quad \text{und}$$
$$\int F_2(x, y) dy = \Phi(x, y).$$

also:

$$\Phi(x, y) = \int xy dx = \frac{x^2y}{2} + \text{const}(y) \quad \text{und}$$

$$\Phi(x, y) = \int x^2y^2 dy = \frac{x^2y^3}{3} + \text{const}(x).$$

Eine solche Potentialfunktion gibt es aber nicht. Denn sonst wäre

$$\frac{x^2y}{2} + \text{const}(y) = \frac{x^2y^3}{3} + \text{const}(x),$$

was nicht der Fall ist, denn für alle für  $x$  bzw.  $y$  konstanten Funktionen  $\text{const}(y)$  bzw.  $\text{const}(x)$  ist

$$\frac{x^2y}{2} - \frac{x^2y^3}{3} \neq \text{const}(x) - \text{const}(y).$$

b.)

$$F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y)) = (\cos(x) \cdot e^y \cdot y, \sin(x) \cdot e^y \cdot (1 + y)).$$

Wenn  $F(x, y)$  ein Potentialfeld ist, so gibt es eine Potentialfunktion  $\Phi(x, y)$  mit:

$$\int F_1(x, y) dx = \Phi(x, y) \quad \text{und}$$
$$\int F_2(x, y) dy = \Phi(x, y).$$

also:

$$\Phi(x, y) = \int \cos(x) \cdot e^y \cdot y dx = \sin(x) \cdot e^y \cdot y + \text{const}(y) \quad \text{und}$$

$$\Phi(x, y) = \int \sin(x) \cdot e^y \cdot (1 + y) dy = \sin(x) \cdot e^y \cdot y + \text{const}(x).$$

(Im zweiten Integral wurde benutzt  $\int e^y \cdot (1 + y) dy = e^y \cdot y + c$ , erhalten durch TI, Matlab, einen Online-Integrator oder partielle Integration).

Mit  $\Phi(x, y) = \sin(x) \cdot e^y \cdot y$  ist  $\text{grad}(\Phi) = F$ , also ist  $F$  ein Gradientenfeld.

c.)

$$F(x, y, z) = F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z) = (y^3 z^4, 3xy^2 z^4 + 3, 4xy^3 z^3 + 2).$$

Wenn  $F(x, y, z)$  ein Potentialfeld ist, so gibt es eine Potentialfunktion  $\Phi(x, y, z)$  mit:

$$\begin{aligned} \int F_1(x, y, z) dx &= \Phi(x, y, z) \quad \text{und} \\ \int F_2(x, y, z) dy &= \Phi(x, y, z) \quad \text{und} \\ \int F_3(x, y, z) dz &= \Phi(x, y, z). \end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z) &= \int y^3 z^4 dx = xy^3 z^4 + \text{const}(y, z) \\ \Phi(x, y, z) &= \int (3xy^2 z^4 + 3) dy = xy^3 z^4 + 3y + \text{const}(x, z) \\ \Phi(x, y, z) &= \int (4xy^3 z^3 + 2) dz = xy^3 z^4 + 2z + \text{const}(x, y). \end{aligned}$$

Mit  $\Phi(x, y, z) = xy^3 z^4 + 3y + 2z$  ist  $\text{grad}(\Phi) = F$ , also ist  $F$  ein Gradientenfeld.

## Aufgabe 2

a.)

$$\Phi(x, y, z) = x^2 \cdot y + e^x \cdot z$$

$$\text{Zugehöriges Kraftfeld } F = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$$

erfüllt:

$$F_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, F_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, F_3 = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \text{ also}$$

$$F_1(x, y, z) = 2xy + e^x \cdot z$$

$$F_2(x, y, z) = x^2$$

$$F_3(x, y, z) = e^x$$

b.) Der gradlinige Weg von  $(0, 0, 0)$  nach  $(1, 2, 4)$  ist die Kurve  $C$ , parametrisiert durch

$$r : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, r(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (t, 2t, 4t)$$

Die Arbeit ist somit

$$\begin{aligned} \int_C F dr &= \int_{t=0}^1 F(r(t)) \cdot \dot{r}(t) dt \\ &= \int_0^1 (2 \cdot t \cdot 2t + e^t \cdot 4t, t^2, e^t) \cdot (1, 2, 4) dt \\ &= \int_0^1 (4t^2 + 4te^t + 2t^2 + 4e^t) dt \\ &= \int_0^1 (6t^2 + 4e^t + 4te^t) dt \\ &= [2t^3 + 4e^t + 4e^t(t-1)]_{t=0}^{t=1} \\ &= 2 + 4e - 4 + 4 = 2 + 4e \approx 12,87 \end{aligned}$$

## Aufgabe 3

Hier gibt es keine Musterlösung ☹.

## Aufgabe 4

a.)

i)

$$F(x, y, z) = (x^2, y + z, \sin(z))$$

$$r(t) = (t, 2t, 3t)$$

$$\Rightarrow \dot{r}(t) = (1, 2, 3), I = [0, 1]$$

$$\int_C F dr = \int_0^1 \left( (t^2, 2t + 3t, \sin(3t)) \cdot (1, 2, 3) \right) dt$$

$$= \int_0^1 (t^2 + 10t + 3 \sin(3t)) dt$$

$$\approx 7.323 \quad (\text{mittels Taschenrechner})$$

ii)

$$F(x, y, z) = (x^2, y + z, \sin(z))$$

$$r(t) = \left( \sin\left(\frac{t \cdot \pi}{8}\right), \frac{t}{2}, \frac{3\sqrt{t}}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \dot{r}(t) = \left( \frac{\pi \cdot \cos\left(\frac{t \cdot \pi}{8}\right)}{8}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4 \cdot \sqrt{t}} \right)$$

$$I = [0, 4]$$

$$\int_C F dr = \int_0^4 \left( \sin\left(\frac{t \cdot \pi}{8}\right)^2, \left(\frac{t}{2} + \frac{3\sqrt{t}}{2}\right), \sin\left(\frac{3\sqrt{t}}{2}\right) \right) \cdot \left( \frac{\pi \cdot \cos\left(\frac{t \cdot \pi}{8}\right)}{8}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4 \cdot \sqrt{t}} \right) dt$$

$$= \int_0^4 \left( \sin\left(\frac{t \cdot \pi}{8}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{t \cdot \pi}{8}\right) \cdot \frac{\pi}{8} + \frac{t}{4} + \frac{3\sqrt{t}}{4} + \sin\left(\frac{3\sqrt{t}}{2}\right) \cdot \frac{3}{4\sqrt{t}} \right) dt$$

$$\approx 8.3233$$

iii)

Vorüberlegung:  $F(x, y, z) = (\cos(x) \cdot y \cdot z, \sin(x) \cdot z, \sin(x) \cdot y)$  ist ein Gradientenfeld mit Potentialfunktion  $\phi(x, y, z) = \sin(x) \cdot y \cdot z$ .

Daher muss für jedes Arbeitsintegral längs eines Weges  $C$  von  $(0, 0, 0)$  nach  $(1, 2, 3)$  gelten:

$$\int_C F dr = \phi((1, 2, 3)) - \phi((0, 0, 0))$$

$$= \sin(1) \cdot 2 \cdot 3 - \sin(0) \cdot 0 \cdot 0$$

$$= 6 \cdot \sin(1) \approx 5.0488$$

Explizites Ausrechnen liefert für den Weg  $r(t) = (t, 2t, 3t) \Rightarrow \dot{r}(t) = (1, 2, 3), I = [0, 1]$

$$\int_C F dr = \int_0^1 \left( (\cos(t) \cdot 2t \cdot 3t, \sin(t) \cdot 3t, \sin(t) \cdot 2t) \cdot (1, 2, 3) \right) dt$$

$$= \int_0^1 (\cos(t) \cdot 2t \cdot 3t + 6 \sin(t) \cdot t + 6 \sin(t) \cdot t) dt$$

$$= \int_0^1 (6 \cos(t) \cdot t^2 + 12 \sin(t) \cdot t) dt$$

$$\approx 5.0488$$

iv)

Gemäß der Vorüberlegung aus 3.) ist das Wegintegral ebenfalls  $\approx 5.0488$ ...

b)

Bei der Funktion aus i.) und ii.) handelt es sich nicht um ein Gradientenfeld. Arbeitsintegrale sind daher wegunabhängig.

Bei der Funktion  $F$  aus iii.) und iv.) handelt es sich um ein Gradientenfeld:

$$F(x, y, z) = \text{grad } \phi(x, y, z) = \left( \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \text{ für } \phi(x, y, z) = \sin(x) \cdot y \cdot z.$$

Arbeitsintegrale hängen daher nur von Start und Endpunkt eines Weges ab, nicht vom Weg selbst.

## Aufgabe 5

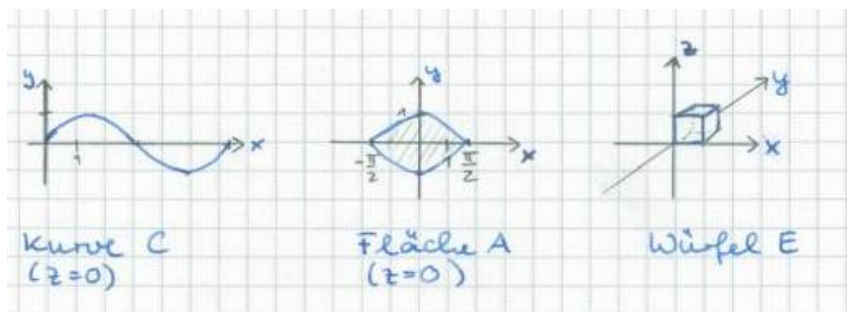
Der Weg wird parametrisiert durch  $s : [0; 0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $s(t) = (0; 0; t)$ . Damit ist  $\dot{s}(t) = (0; 0; 1)$ , und man erhält:

$$\begin{aligned} \int F ds &= \int_{t=0}^{0,1} F(s(t)) \cdot \dot{s}(t) dt \\ &= \int_{t=0}^{0,1} (F_1 - F_2)(s(t)) \cdot \dot{s}(t) dt \\ &= \int_{t=0}^{0,1} ((0; 0; 2g) - (0; 0; 10 \cdot t \cdot g)) \cdot (0; 0; 1) dt \\ &= \int_{t=0}^{0,1} (0; 0; 2g - 10 \cdot t \cdot g) \cdot (0; 0; 1) dt \\ &= \int_{t=0}^{0,1} (2 \cdot g - 10 \cdot t \cdot g) dt \\ &= g \cdot [2t - 10 \cdot t^2/2]_{t=0}^{0,1} = g \cdot [0, 2 - 10 \cdot (0, 1)^2/2] = g \cdot 0, 15. \end{aligned}$$

Für  $g = 9, 80665$  erhält man  $\int F ds \approx 1, 471$  ☺.

## Aufgabe 6

Vorarbeit: Wie sehen die Kurve  $C$ , die Fläche  $A$  und der Würfel  $E$  aus?



- a.) Weglängen von Kurven werden mittels einem Kurvenintegral erster Art, mit der konstanten Funktion 1 als Argument, gelöst:

$$\text{Weglänge} = \int_C dr = \int_{t=t_u}^{t_o} |\dot{r}(t)| dt.$$

Hier ist  $r(t) = (t, \sin t, 0)$ , also  $\dot{r}(t) = (1, \cos t, 0)$  und damit  $|\dot{r}(t)| = \sqrt{1 + (\cos t)^2}$ .

Man erhält:

$$\text{Weglänge} = \int_C dr = \int_{t=t_u}^{t_o} |\dot{r}(t)| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + (\cos t)^2} dt \approx 7,64 \quad (\text{Taschenrechner})$$

- b.) Größen von Flächen, die man gut "scannen" kann, werden mittels einem Mehrfachintegral (genauer: einem Doppelintegral), mit der konstanten Funktion 1 als Argument, gelöst:

$$\text{Fläche} = \iint_{(A)} dA = \int_{x=x_u}^{x_o} \int_{y=y_u}^{y_o} 1 dy dx$$

Man erhält hier:

$$\begin{aligned} \text{Fläche} &= \int_{x_u=-\pi/2}^{x_o=\pi/2} \int_{y_u=-\cos x}^{y_o=\cos x} 1 dy dx \\ &= \int_{x_u=-\pi/2}^{x_o=\pi/2} [y]_{y=-\cos x}^{\cos x} dx = \int_{x_u=-\pi/2}^{x_o=\pi/2} 2 \cos x dx \\ &= [2 \sin x]_{x=-\pi/2}^{\pi/2} = 2 + 2 = 4. \end{aligned}$$

- c.) Ok, das Volumen des Würfels ist offensichtlich 1.

Will man Integrale anwenden, ginge man wie folgt vor:

Volumina von Körpern, die man gut "scannen" kann, werden mittels einem Mehrfachintegral (genauer: einem Dreifachintegral), mit der konstanten Funktion 1 als Argument, gelöst:

$$\text{Volumen} = \iiint_{(A)} dA = \int_{x=x_u}^{x_o} \int_{y=y_u}^{y_o} \int_{z=z_u}^{z_o} 1 dz dy dx$$

Man erhält hier:

$$\begin{aligned} \text{Volumen} &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 \int_{z=0}^1 1 \, dz \, dy \, dx \\ &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 [z]_0^1 \, dy \, dx = \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 1 \, dy \, dx \\ &= \int_{x=0}^1 [y]_0^1 \, dx = \int_{x=0}^1 1 \, dx = [x]_0^1 = 1 \end{aligned}$$

- d.) Da es sich um bei  $f$  um ein Skalarfeld handelt, muss das Kurvenintegral erster Art berechnet werden:

$$\int_C f \, dr = \int_{t=t_u}^{t_o} f(r(t)) \cdot |\dot{r}(t)| \, dt.$$

Hier ist  $r(t) = (t, \sin t, 0)$ , also  $\dot{r}(t) = (1, \cos t, 0)$  und damit  $|\dot{r}(t)| = \sqrt{1 + (\cos t)^2}$ .

Man erhält:

$$\begin{aligned} \int_C f \, dr &= \int_{t=t_u}^{t_o} f(r(t)) \cdot |\dot{r}(t)| \, dt \\ &= \int_{t=0}^{2\pi} f((t, \sin t, 0)) \cdot |(1, \cos t, 0)| \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} t \cdot \sin t \cdot \sqrt{1 + (\cos t)^2} \, dt \approx -7,21179\dots \quad (\text{Taschenrechner}) \end{aligned}$$

Negatives Ergebnis? Ja, denn  $f$  ist im ersten Bogen der Sinus-Kurve positiv. Im zweiten Bogen, der genauso lang ist und genauso schnell durchlaufen wird, ist  $f$  negativ und von größerem Betrag als im ersten Bogen.

- e.) Die an einem Objekt geleistete Arbeit während der Bewegung im Kraftfeld  $F$  auf einer Kurve wird mit einem Kurvenintegral zweiter Art gelöst:

$$\int_C F \, dr = \int_{t=t_u}^{t_o} F(r(t)) \cdot \dot{r}(t) \, dt.$$

Hier bezeichnet “ $\cdot$ ” das Skalarprodukt. Außerdem ist wieder  $r(t) = (t, \sin t, 0)$ , also  $\dot{r}(t) = (1, \cos t, 0)$  und damit  $|\dot{r}(t)| = \sqrt{1 + (\cos t)^2}$ .

Man erhält:

$$\begin{aligned} \int_C F \, dr &= \int_{t=t_u}^{t_o} F(r(t)) \cdot \dot{r}(t) \, dt \\ &= \int_{t=0}^{2\pi} F((t, \sin t, 0)) \cdot (1, \cos t, 0) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (t \sin t, e^t, 0) \cdot (1, \cos t, 0) \, dt = \int_0^{2\pi} (t \sin t + e^t \cos t) \, dt \approx 260,96\dots \quad (\text{TI}) \end{aligned}$$

f.) Es gibt eine physikalische und eine mathematische Erklärung:

Physikalische Erklärung: Arbeit = Kraft · Weg. Kräfte sind Vektoren, keine Skalare - daher kann nur ein Vektorfeld, nicht ein Skalarfeld, Arbeit an einem Teilchen verrichten.

Mathematische Erklärung: Die Arbeit wird mit einem Kurvenintegral zweiter Art ausgerechnet. Deren Integrand ist das Skalarprodukt des Feldes mit  $\dot{r}(t)$ . Das Skalarprodukt kann nur zwischen zwei Vektoren gebildet werden, also nicht in einem Skalarfeld.

g.) Durchflüsse durch Flächen, die man gut "scannen" kann, werden mittels einem Oberflächenintegral gelöst. Die Integralgrenzen werden dabei so bestimmt, dass die Fläche gescannt wird. Der Integrand an einem Punkt ist das Skalarprodukt aus der Flussdichte an dem Punkt mit dem Normalenvektor auf die Fläche an dem Punkt:

$$\text{Durchfluss} = \iint_{(A)} F \, dA = \iint_{(A)} F(x, y, z) \cdot N(x, y, z) \, dA$$

Hier liegt die Fläche  $A$  komplett in der  $xy$ -Ebene, ist der Normalenvektor auf die Fläche ist also überall  $(0, 0, 1)$ . Man erhält:

$$\begin{aligned} \text{Durchfluss} &= \int_{x_u=-\pi/2}^{x_o=\pi/2} \int_{y_u=-\cos x}^{y_o=\cos x} F(x, y, 0) \cdot (0, 0, 1) \, dy \, dx \\ &= \int_{x_u=-\pi/2}^{x_o=\pi/2} \int_{y_u=-\cos x}^{y_o=\cos x} 0 \, dy \, dx = 0. \end{aligned}$$

Kein Durchfluss? Ja, denn  $F$  hat für  $z = 0$  die Gestalt  $F(x, y, z) = (xy, e^x, 0)$ , also keinen Anteil, der senkrecht auf der  $xy$ -Ebene steht.

h.) Massen von Körpern mit gegebener Massedichte  $f$ , werden mittels einem Mehrfachintegral (genauer: einem Dreifachintegral), mit der Massedichte als Argument, gelöst:

$$\text{Gesamtmasse} = \iiint_{(A)} dA = \int_{x=x_u}^{x_o} \int_{y=y_u}^{y_o} \int_{z=z_u}^{z_o} f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx$$

Man erhält hier:

$$\begin{aligned} \text{Gesamtmasse} &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 \int_{z=0}^1 f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx = \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 \int_{z=0}^1 (xy + z) \, dz \, dy \, dx \\ &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 \left[ xyz + \frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^1 \, dy \, dx = \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 \left( xy + \frac{1}{2} \right) \, dy \, dx \\ &= \int_{x=0}^1 \left[ \frac{xy^2}{2} + \frac{1}{2} y \right]_{y=0}^1 \, dx = \int_{x=0}^1 \left( \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right) \, dx \\ &= \left[ \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} x \right]_{x=0}^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

i.) Es gibt eine physikalische und eine mathematische Erklärung:

Physikalische Erklärung: Eine Massedichte ist eine Zahl, kein Vektor.

Mathematische Erklärung: Bei einem Mehrfachintegral muss der Integrand ein Skalarfeld, kein Vektorfeld sein. Auch ein Oberflächenintegral kann man über einen Würfel nicht berechnen, da es keine Normalenvektoren auf einem dreidimensionalen Objekt in einem dreidimensionalen Raum gibt.