Übungsblatt 6

Technische Hochschule Mittelhessen, Mathematik 2 für EI, Prof. Dr. B. Just

Aufgabe 1

Bitte prüfen Sie, ob die folgenden Vektorfelder Gradientenfelder sind, und bestimmen Sie gegebenenfalls die zugehörige Potentialfunktion.

a.) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad , F(x, y) = (xy, x^2y^2)$.

b.) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad , F(x, y) = (\cos(x) \cdot e^y \cdot y \;\;, \;\; \sin(x) \cdot e^y(1 + y))$.

c.) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad , F(x, y, z) = (y^3z^4 \;,\; 3xy^2z^4 + 3 \;,\; 4xy^3z^3 + 2)$.

d.) Bitte wählen Sie ein eigenes Vektorfeld ☺.

Aufgabe 2

Gegeben sei die Potentialfunktion $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad \Phi(x, y, z) = x^2 \cdot y + e^x \cdot z$.

a.) Bitte bestimmen Sie das zugehörige Kraftfeld $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

b.) Bitte berechnen Sie die Arbeit, die an einem Massepunkt durch F auf dem gradlinigen Weg von $(0, 0, 0)$ nach $(1, 2, 4)$ geleistet wird.
Hinweis: Stammfunktionen im Zweifelsfall nachsehen :-) .

Aufgabe 3

Bitte wählen Sie eine eigene Potentialfunktion $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,.

a.) Bitte bestimmen Sie das zugehörige Kraftfeld $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

b.) Bitte berechnen Sie die Arbeit, die an einem Massepunkt durch F auf dem gradlinigen Weg von $(1, 1)$ nach $(4, 4)$ geleistet wird.
Hinweis: Stammfunktionen im Zweifelsfall nachsehen :-) .

Aufgabe 4

a.) Bitte berechnen Sie die folgenden Arbeitsintegrale, gerne auch mittels Taschenrechner:

i.) $F(x, y, z) = (x^2, y + z, \sin(z))$ längs des Weges
$r(t) = (t, 2t, 3t)$ von $(0, 0, 0)$ nach $(1, 2, 3)$, d.h., $I = [0, 1]$.

ii.) $F(x, y, z) = (x^2, y + z, \sin(z))$ längs des Weges
$r(t) = (\sin(t \cdot \pi/8),\; t/2,\; 3\sqrt{t}/2)$ von $(0, 0, 0)$ nach $(1, 2, 3)$, d.h., $I = [0, 4]$.

iii.) $F(x, y, z) = (\cos(x) \cdot y \cdot z, \sin(x) \cdot z, \sin(x) \cdot y)$ längs des Weges
$r(t) = (t, 2t, 3t)$ von $(0, 0, 0)$ nach $(1, 2, 3)$, d.h., $I = [0, 1]$.

iv.) $F(x, y, z) = (\cos(x) \cdot y \cdot z, \sin(x) \cdot z, \sin(x) \cdot y)$ längs des Weges
$r(t) = (\sin(t \cdot \pi/8),\; t/2,\; 3\sqrt{t}/2)$ von $(0, 0, 0)$ nach $(1, 2, 3)$, d.h., $I = [0, 4]$.

b.) Warum sind die Ergebnisse von i.) und ii.) verschieden, und diejenigen von iii.) und iv) aus a.) gleich?

Aufgabe 5

Ein punktförmiges Objekt (z.B: ein idealisierter Würfel, dessen Masse komplett in der Mitte der Unterseite ist) bewegt sich im $\mathbb{R}^3$ auf dem gradlinigen Weg s von $(0;\; 0;\; 0)$ nach $(0;\; 0;\; 0,1)$. Es sei g eine Konstante, z.B. $g = 9,80665$.

Auf das Objekt wirkt ein Vektorfeld (z.B. ein Kraftfeld) $F = F_1 - F_2$, wobei

$F_1(x, y, z) = (0;\; 0;\; 2 \cdot g), \qquad\qquad F_2(x, y, z) = (0;\; 0;\; 10 \cdot z \cdot g)$

(z.B. ist F_1 die Gravitationskraft bei Masse 2 kg, und F_2 der Auftrieb, der in einem 10 cm hohen Wasserbecken auf einen Würfel mit Kantenlänge 10 cm wirkt: Bei 0,1 m wirkt 1 kg senkrecht).

Bitte berechnen Sie $\int F\, ds$.

Das waren die Aufgaben zu einzelnen Integralarten. Auf der Rückseite kommt noch eine einzige Aufgabe zu allen Integralen, für jetzt oder später mit Muße :-)

Aufgabe 6

Im $\mathbb{R}^3$ sind folgende Objekte gegeben:

i.) Die normale Sinuskurve C, die in der $xy-$Ebene zwischen 0 und 2π verläuft, parametrisiert durch $r : [0; 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad r(t) = (t, \sin t, 0)$

ii.) Das Skalarfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = xy + z$

iii.) Das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad F(x, y, z) = (xy + 2z, e^x, x^2y^2z^2)$

iv.) Die Fläche A in der $xy-$Ebene, die von den Funktionsgraphen $y = \cos x$ und $y = -\cos x$ im Intervall $[-\pi/2; \pi/2]$ eingeschlossen wird

v.) Der dreidimensionale Einheitswürfel E mit den Eckpunkten $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ (und daher auch den Eckpunkten $(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 1)$).

Bitte lösen Sie - mithilfe eines Taschenrechners - die folgenden Aufgaben. Bitte machen sich dabei klar, um welchen Integraltyp (Kurvenintegral erster oder zweiter Art, Mehrfachintegral oder Oberflächenintegral) es sich handelt.

a.) Was ist die Weglänge der Kurve C?

b.) Wie groß ist die Fläche A?

c.) Was ist das Volumen des Würfels E?
(Ok, das wäre auch ohne Integral gegangen ☺.)

d.) Was ist das Kurvenintegral von f längs der Kurve C (entscheiden Sie selbst, ob es sich um ein Kurvenintegral erster oder zweiter Art handelt)?

e.) Wenn F als Kraftfeld aufgefasst wird, welche Arbeit wird an einem Teilchen verrichtet, dass gemäss der gegebenen Parametrisierung r längs der Kurve C fliegt?

f.) Warum kann das Skalarfeld f keine Arbeit an einem entlang der Kurve fliegenden Teilchen verrichten?

g.) Wenn F als Flussdichte eines Flusses aufgefasst wird, der durch den $\mathbb{R}^3$ fließt, welcher Fluss fließt dann pro Zeiteinheit durch die Fläche A?

h.) Wenn f als Massedichte aufgefasst wird, welche Masse hat dann der Würfel E?

i.) Warum kann das Vektorfeld F nicht als Massedichte aufgefasst werden, die dem Würfel eine Gesamtmasse verleiht?

Viel Spass und Erfolg!