Übungsblatt 7

Technische Hochschule Mittelhessen, Mathematik 2 für EI, Prof. Dr. B. Just

Aufgabe 1

Differentialgleichungen erster Ordnung können als Richtungsfelder dargestellt werden. Die allgemeine Lösung der DGL ist dann eine Menge von Funktionen: Alle Funktionen, die "glatt"durch das Richtungsfeld gezeichnet werden können. Eine spezielle Lösung ist eine spezielle Funktion aus dieser Menge, die durch einen vorgegebenen Punkt $(x_0,\ y_0)$ geht, oder bei einem vorgegebenen Wert x_0 eine vorgegebene Steigung $y'(x_0)$ hat.

Auf der folgenden Internet-Seite kann man sehr gut mit Richtungsfeldern arbeiten / spielen:

http://www.ateus.ch/Scd/MathApplets/RtgFeld.htm

Bitte nehmen Sie sich etwa 15 - 30 Minuten Zeit, um auf der Seite Differentialgleichungen erster Ordnung einzugeben und die unterschiedlichen speziellen Lösungen zu sichten :-).

Aufgabe 2

a.) Bitte bestimmen Sie durch Trennung der Variablen die allgemeine Lösung der DGL sowie die spezielle Lösung für die vorgegebenen Anfangs- bzw. Randwerte. Stammfunktionen finden sich im Taschenrechner oder online :-).

i.) DGL: $y' = \cos(x) \cdot y^2$. Anfangswert: $y(\pi) = 1$.

ii.) DGL: $y' = x \cdot \sin(x) \cdot \cos^2(y)$. Anfangswert: $y(0) = 1$.

b.) Es wird die DGL $y' = f(x) \cdot y$ betrachtet.
Bitte bestimmen Sie durch Trennung der Variablem die allgemeine Lösung der DGLs

i.) $y' = \sin(2x) \cdot y$.

ii.) $y' = f(x) \cdot y$.

c.) Bitte bestimmen Sie durch Trennung der Variablen die allgemeine Lösung der DGL $y' + a \cdot y = b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.
Bemerkung: Die DGL $y' + a \cdot y = b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ heißt ″inhomogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten″ (na gut ;-)).
Die DGL beschreibt z.B. einen Schwingkreis mit Spannungsquelle (Spannung u_0), Widerstand (R) und Spule (Induktivität L). Denn es gilt für diesen Schwingkreis:

$$u_0 = u_R + u_L = i(t) \cdot R + L \cdot \frac{d\ i(t)}{dt} \quad \text{und somit}$$

$$\frac{d\ i(t)}{dt} + \frac{R}{L} \cdot i(t) = \frac{u_0}{L}\ .$$

Das ist die DGL $y' + a \cdot y = b$ mit $y = i(t),\ a = R/L$ und $b = u_0/L$.

Aufgabe 3

a.) Bitte bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL $y' - 4y = 0$.

b.) Bitte machen Sie die Probe für Ihr Ergebnis aus a.), d.h., prüfen Sie nach, ob die gefundene Lösung die DGL erfüllt.

c.) Bitte bestimmen Sie unter Benutzung von a.) die Lösung des Anfangswertproblems
$y' - 4y = 0,\ \ y(0) = 10$.

d.) Bitte bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL $y'' - 2y' + 5y = 0$.

e.) Bitte bestimmen Sie unter Benutzung von d.) die Lösung des Anfangswertproblems
$y'' - 2y' + 5y = 0,\ \ y(0) = 1,\ y(\pi/4) = 2 \cdot e^{\pi/4}$.

f.) Bitte bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL
$y^{(4)} - 8\ y''' + 42\ y'' - 104\ y' + 169\ y = 0$.

Viel Spass und Erfolg!