Übungsblatt 12 - Musterlösung

TH Mittelhessen, Mathematik 2 für EI, Prof. Dr. B. Just

Aufgabe 1

a.) $\Omega = \{\text{Jan, Feb, ..., Dez}\}$, alle gleich wahrscheinlich $\Rightarrow p(\text{Dez}) = \frac{1}{12}$.

b.) Es wird zunächst die Wahrscheinlichket berechnet,
dass alle an unterschiedlichen Tagen Geburtstag haben.
Diese ist

$$\frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot .... \cdot \frac{336}{365} = \frac{365!}{365^{30} \cdot 335!} \approx 0,29368$$

Daher ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit
$1 - 0,29368 \approx 0,7063$.

c.)

$$p(x = 3) = \binom{6}{3} \cdot (\frac{3}{7})^3 \cdot (\frac{4}{7})^3 \approx 0,2937$$

d.) n = 1.000.000, p =0,001 $\Rightarrow \mu = n \cdot p = 1000$

$$p(x = 3) = \frac{\mu^x}{k!} \cdot e^{-\mu} = \frac{1000^3}{3!} \cdot e^{-1000} \approx 8,459931 \cdot 10^{-427}$$

$$p(x = 4) = \frac{\mu^x}{k!} \cdot e^{-\mu} = \frac{1000^4}{4!} \cdot e^{-1000} \approx 2,11498 \cdot 10^{-424}$$

$p(x = 3 \text{ oder } x = 4) = 8,459931 \cdot 10^{-427} + 2,11498 \cdot 10^{-424} \approx 0,0$.
Es entspricht der Anschauung, denn erwartet wird ein Zerfall von ca 1000 Atomen.
Die Wahrscheinlichkeit, dass nur 3 oder 4 zerfallen, ist praktisch 0.

e.) Beide Intervalle sind disjunkt, die Wahrscheinlichkeit ist

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \; e^{-t^2/2} \; dt + \int_{-2.5}^{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \; e^{-t^2/2} \; dt.$$

Berechnung durch $\text{normcdf}(-2, 2, 0, 1) + \text{normcdf}(2.5, 3, 0, 1) \approx 0,95449 + 0,004859 \approx 0,959349$.

Aufgabe 2

a.)
Binomialverteilung $B(6, \frac{1}{2})$

$$p(x=4) = \binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k}$$
$$= \binom{6}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$= 15 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{15}{64}$$
$$\approx 0.234$$

b)
Biniomialverteilung $B(6, \frac{1}{2})$

$$p(x \geq 4) = p(x=4) + p(x=5) + p(x=6)$$
$$= \binom{6}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \binom{6}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \binom{6}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6$$
$$= \frac{15}{64} + \frac{6}{64} + \frac{1}{64} = \frac{22}{64}$$
$$\approx 0.343$$

c)
Binomialverteilung $B(6, \frac{1}{3})$, wenn die Zahl der Köpfe gezählt wird:

$$p(x=0) = \binom{6}{0} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{64}{729}$$
$$\approx 0.0877$$

Alternative: Binomialverteilung $B(6, \frac{2}{3})$, wenn die Zahl der Zahlen gezählt wird:

$$p(x=6) = \binom{6}{6} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{64}{729}$$
$$\approx 0.0877$$

d)
Laplace wiederholt ausgeführt: Insgesamt gibt es 12^6 Möglichkeiten für die Geburtstags-"Vektoren". Davon enthalten $12{\cdot}11{\cdot}10{\cdot}9{\cdot}8{\cdot}7$ keine zwei gleichen Monate. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{12^6} \approx 0.2228$$

Aufgabe 3

Die folgenden Grafiken veranschaulichen die Rechnungen. Grundsätzlich gibt es vier mögliche Ergebniskombinationen, ob ein Teil intakt / defekt ist, und ob der Test „intakt“ oder „defekt“ aussagt:

- Teil ist intakt, Test sagt „intakt“
- Teil ist intakt, Test sagt „defekt“
- Teil ist defekt, Test sagt „intakt“
- Teil ist defekt, Test sagt „defekt“ .

	Teil intakt	Teil defekt
Test sagt „intakt“	Teil intakt Test sagt „intakt“	Teil defekt Test sagt „intakt
Test sagt „defekt“	Teil intakt Test sagt „defekt“	Teil defekt Test sagt „defekt“

Die einzelnen Felder haben die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

	$p = \frac{850}{1000}$ $\downarrow$ Teil intakt	$p = \frac{150}{1000}$ $\downarrow$ Teil defekt
Test sagt „intakt“	$p = \frac{850}{1000} \cdot 0{,}9 = 0{,}765$	$p = \frac{150}{1000} \cdot 0{,}2 = 0{,}03$
Test sagt „defekt“	$p = \frac{850}{1000} \cdot 0{,}1 = 0{,}085$	$p = \frac{150}{1000} \cdot 0{,}8 = 0{,}12$

a)
Es bezeichne B das Ereignis, dass intaktes Teil gezogen wird: $p(B) = \frac{850}{1000}$
$A|B$ bezeichne das Ereignis, dass ein intaktes Teil auch als intakt ausgewiesen wird: $p(A|B) = 0.9$
gesucht ist $p(A \cap B)$. Diese Zahl wird über die Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit ausgerechnet:

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$
$$\Rightarrow 0.9 = p(A \cap B) / \frac{850}{1000}$$
$$\Rightarrow p(A \cap B) = 0.9 \cdot \frac{850}{1000} = 0.765$$

b)
wie in Teil a):
$B \mathrel{\widehat{=}}$ Ein defektes Teil wird gezogen: $p(B) = \frac{150}{1000}$
$A|B \mathrel{\widehat{=}}$ Ein defektes Teil wird als intakt ausgewiesen: $p(A|B) = 0.2$

$$\Rightarrow P(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$
$$\Rightarrow 0.2 = p(A \cap B) / \frac{150}{1000}$$
$$\Rightarrow p(A \cap B) = 0.2 \cdot \frac{150}{1000} = 0.03$$

c)
Ergebnis ist Summe aus den Teilen a & b$\Rightarrow$ Wahrscheinlichkeit ist $0.765 + 0.03 = 0.795$.

d)
Der Anteil der tatsächlich intakten Teilen an den als intakt ausgewiesenen Teilen beträgt $\frac{0.765}{0.795} \approx 0,96226$
Das ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein als intakt ausgewiesenes Teil aus der gegebenen Grundmenge intakt ist.

Aufgabe 4

a) normcdf$(1,7,4,2) \approx 0.86638$.

b) normcdf$(-3,3,0,2) \approx 0.86638$, daher ist die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis außerhalb des Intervalls $\approx 1 - 0.86638 = 0,13362$

c) normcdf$(4,16,10,4) \approx 0.86638$, daher ist die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis außerhalb des Intervalls $\approx 1 - 0.86638 = 0,13362$

Bem: Die Zwischenergebnisse aus a., b. und c. sind gleich , weil es sich jeweils um das Intervall $[\mu - 1.5 \cdot \sigma, \mu + 1.5 \cdot \sigma]$ handelt

d)
normcdf$(10,\infty,5,5)$ kann man nicht eingeben. Wir nutzen also:
$p(x \leq 5) = \frac{1}{2}$ und
normcdf$(5,10,5,5) \approx 0.341344 = p(5 \leq x \leq 10)$ und erhalten

$$p(x \geq 10) = 1 - p(x \leq 10)$$

$$= 1 - (p(x \leq 5) + p(5 \leq x \leq 10))$$

$$= 1 - \frac{1}{2} - 0.341344 \approx 0.158656$$

(es wurde hier benutzt, dass bei der Normalverteilung (verblüffenderweise) die Wahrscheinlichkeit einer EINZELNEN Zahl Null ist .... erst Intervalle haben positive Wahrscheinlichkeiten).

Aufgabe 5

a.) A = { durch 3 teilbare Ergebnisse } = { 3 ; 6 }, $p(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
B = {Ergebnisse ≥ 4 } = { 4 ; 5 ; 6}, $p(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
$A \cap B$ = { durch 3 teilbar und $\geqslant 4$} = {6} , $p(A \cap B) = \frac{1}{6}$.
Daher ist

$$p(\text{durch 3 teilbar}|\geqslant 4) = p(A \cap B)|p(B) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$p(\geqslant 4|\text{durch 3 teilbar}) = p(A \cap B)|p(A) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

b.) A={ gerade Ergebnisse} = { 2 ; 4 ; 6} ; $p(A) = \frac{3}{7}$
B= { Ergebnisse $\geqslant 4$} = { 4 ; 5 ; 6 ; 7} ; $p(B) = \frac{4}{7}$
$A \cap B$ = { gerade Ergebnisse $\geqslant 4$} = { 4 ; 6 } ; $p(A \cap B) = \frac{2}{7}$

$$p(\text{gerade}| \geqslant 4) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{4}{7}} = \frac{1}{2}$$

$$p(\geqslant 4|\text{gerade}) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{3}{7}} = \frac{2}{3}$$

(Passt auch zur Anschauung).

c.) Sei A=[-1,1] und B=[-2,2].
Dann ist $A \cap B = A = [-1, 1]$ und

$$p(A) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \; e^{-t^2/2} \; dt,$$

Berechnung durch normcdf$(-1, 1, 0, 1) \approx 0,68268$,

$$p(B) = \int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \; e^{-t^2/2} \; dt,$$

Berechnung durch normcdf$(-2, 2, 0, 1) \approx 0,954499$
Somit

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{0,68268}{0,95449} \approx 0,71523$$

Umgekehrt, da $x \in B$ immer erfüllt ist, wenn $x \in A$ gilt:

$$p(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{p(A)} = \frac{p(A)}{p(A)} = 1$$

d.) Wenn X eine $N(\mu, \sigma)$-verteilte Zufallsgröße ist, so ist $\frac{X-\mu}{\sigma}$ eine $N(0, 1)$-verteilte Zufallsgröße.
Also ist
$p(X \in [\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma] \mid X \in [\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]) \;=\; p(\frac{x-\mu}{\sigma} \in [-2, 2] \mid \frac{X-\mu}{\sigma} \in [-3, 3])$.
Wir setzen also A=[-2,2], B = [-3,3]
und berechnen p(A|B) mit der Standardnormalverteilung:
$p(A) = \int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \; e^{-t^2/2} \; dt$, Berechnung durch normcdf$(-2, 2, 0, 1) \approx 0,954499$
$p(B) = \int_{-3}^{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \; e^{-t^2/2} \; dt$, Berechnung durch normcdf$(-3, 3, 0, 1) \approx 0,997300$.
$A \cap B = A$, also erhält man
$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{p(B)} \approx \frac{0,954499}{0,957300} \approx 0,95708$

e.) Ja, p(A|B) = p(B|A) stimmt, denn
$P(A|B) = \frac{P(A \wedge B)}{p(B)}$ und $p(B|A) = \frac{P(A \wedge B)}{p(A)}$
Im Fall $p(B) = p(A)$ ist beides gleich.

Aufgabe 6

a)

$$E(x) = \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 3 + \frac{1}{4}\cdot 16 = \frac{20}{4} = 5$$

b)

$$\sigma^2 = \operatorname{var}(x) = E((x - E(x))^2) =$$
$$\frac{1}{4}\cdot(0-5)^2 + \frac{1}{4}\cdot(1-5)^2 + \frac{1}{4}\cdot(3-5)^2 + \frac{1}{4}(16-5)^2$$
$$= \frac{1}{4}(25+16+4+121) = 41.5 \text{ Varianz}$$
$$\text{Standardabweichung} \quad \sigma = \sqrt{41.5} \approx 6.44$$

c)

$$p\left(x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]\right)$$
$$= \int_{x=\pi/4}^{3\pi/4} \frac{1}{2}\cdot\sin(x)\ dx \approx 0.7071$$

d)

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\ dx$$
$$= \int_{0}^{\pi} \frac{1}{2}\ x\cdot\sin(x)\ dx \approx 1.570796$$

e)

$$\text{Varianz: } \sigma^2 = E((x - E(x))^2)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x - 1.570796)^2\cdot f(x)\ dx$$
$$= \int_{0}^{\pi} (x - 1.570796)^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin(x)\ dx \quad (\text{weil} f(x) = 0 \text{ für } x \notin [0,\ \pi]\ )$$
$$\approx 0,4674$$
$$\text{Standardabweichung: } \quad \sigma = \sqrt{\sigma^2} \approx 0.68366$$