Quantencomputing - Übungsblatt 4

zu „2.3 Mathematik im Berechnungsmodell“

Technische Hochschule Mittelhessen, Fachbereich MNI, Prof. Dr. B. Just

Aufgabe 10

Bitte zeigen Sie, dass für jedes $N \in \mathbb{N}$ die unitären $N \times N$-Matrizen mit der Matrixmultiplikation eine Gruppe bilden.

Zu zeigen sind also die Gruppeneigenschaften:

a.) Abgeschlossenheit. Das Produkt zweier unitärer Matrizen ist unitär.

b.) Assoziativität: Sind A, B, C unitäre $N \times N$-Matrizen, so ist $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.

c.) Neutrales Element: Es gibt eine unitäre Matrix $N \times N$-Matrix E, sodass für jede unitäre $N \times N$-Matrix U gilt: $E \cdot U = U \cdot E = U$.

d.) Inverse Elemente: Für jede unitäre $N \times N$-Matrix U gibt es eine unitäre $N \times N$-Matrix U^{-1}, sodass gilt $U \cdot U^{-1} = U^{-1} \cdot U = E$.

Die Eigenschaften der Matrixmultiplikation dürfen benutzt werden :-).

Aufgabe 11

a.) Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Bitte bilden Sie die Tensorprodukte $A \otimes B$ und $B \otimes A$.

b.) Bitte erfinden Sie solange neue Matrizen (können auch Vektoren sein), und bilden Sie die Tensorprodukte, bis Ihnen langweilig wird.

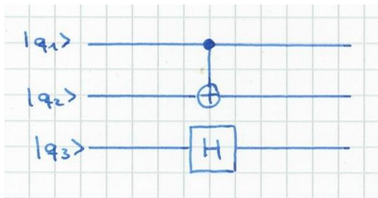
c.) Es sei $Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, und $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Bitte bilden Sie $Id \otimes H, H \otimes Id, H \otimes H$ und $H \otimes H \otimes H$.
(Die Ergebnisse kamen in einer früheren Aufgabe bereits vor, als es darum ging, die beschreibenden unitären Matrizen für Quantenschaltkreise zu finden, in denen die Hadamard-Matrix vorkam.)

... auf der Rückseite sind noch zwei Aufgaben

Aufgabe 12

Betrachtet wird der folgende Quantenschaltkreis:



a.) Bitte geben Sie mittel Hilfe des Tensorproduktes die unitäre Transformation auf dem Zustandsraum an, die die Wirkung des Schaltkreises beschreibt.

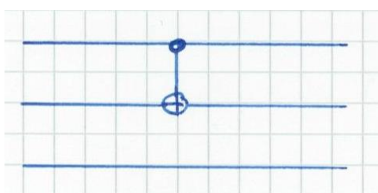
b.) Inputs für den Schaltkreis sei jetzt ein Quantenregister mit drei QBits im Zustand

$|q_1 q_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1}{2}|10\rangle$ und $|q_3\rangle = |0\rangle$

In welchem Zustand ist das Quantenregister, nachdem die Transformationen des Schaltkreises durchgeführt wurden?

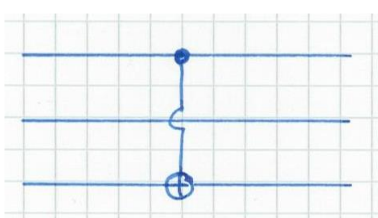
Aufgabe 13

a.) Betrachtet wird der folgende Quantenschaltkreis:



Bitte geben Sie die zugehörigen unitäre Transformationsmatrix mittels des Tensorproduktes an (die 2×2-Einheitsmatrix beschreibt das Nichts-Tun auf einem QBit).

b.) Betrachtet wird jetzt der folgende Quantenschaltkreis:



Bitte geben Sie die zugehörigen unitäre Transformationsmatrix an. Kann sie als Tensorprodukt geschrieben werden? Bitte beweisen (! :-)) Sie Ihre Antwort.

Viel Spass und Erfolg!