Quantencomputing - Übungsblatt 5

zu „3. Erste Quantenalgorithmen“

Technische Hochschule Mittelhessen, Fachbereich MNI, Prof. Dr. B. Just

Aufgabe 14

a.) Bitte bestimmen Sie für alle 16 klassischen booleschen Funktionen von zwei Variablen, also für alle $f : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$, die Quantenschaltkreise zur Berechnung:

Jeder Quantenschaltkreis für ein f verarbeitet die drei (unverschränkten) Input-QBits $|x_1\rangle, |x_2\rangle$ und $|0\rangle$, und bei Input eines beliebigen Basiszustandes $|x_1x_2\rangle$ soll nach der Berechnung das dritte QBit im Zustand $|f(x_1,x_2)\rangle$ sein.

b.) Bitte entwerfen Sie einen Quantenschaltkreis zur Berechnung der folgenden booleschen Funktion von drei Variablen. Dabei sind „garbage-QBits“zum Zwischenspeichern von Werten zulässig.

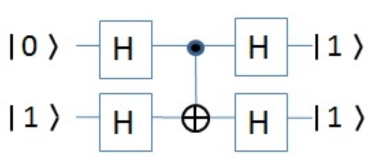
x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

c.) Bitte zeigen Sie für Ihren Quantenschaltkreis aus b.:

Ist der Input ein Basiszustand, so ist der Quantenschaltkreis nach jeder Transformation in einem Basiszustand.

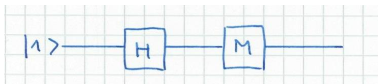
Das ist wichtig, wenn Sie auf Quantenbits mehrfach zugreifen.

d.) Bitte zeigen Sie, dass das folgende Diagramm korrekt ist, dass also der abgebildete Quantenschaltkreis bei Input $|01\rangle$ am Ende der Berechnung im Zustand $|11\rangle$ ist. Hier ist also eine zeilenweise Betrachtung der QBits nicht korrekt.

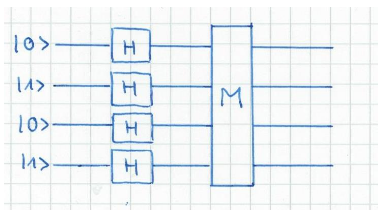


Aufgabe 15

a.) Was berechnet der folgende Quantenschaltkreis (bitte begründen Sie Ihre Antwort):



b.) Was berechnet der folgende Quantenschaltkreis (bitte begründen Sie Ihre Antwort):



Aufgabe 16

Die Aufgabe dient dazu, folgenden Effekt zu zeigen, der bei der Teleportation verwendet wird:
Eines der QBits in einem Quantenregister aus zwei QBits wird durch eine unitäre Transformation verändert. Im Falle verschränkter QBits ist die Information über die Transformation nicht bei dem transformierten QBit alleine, sondern „zwischen den QBits"angesiedelt. Messen eines der QBits verschiebt die Information auf das andere.

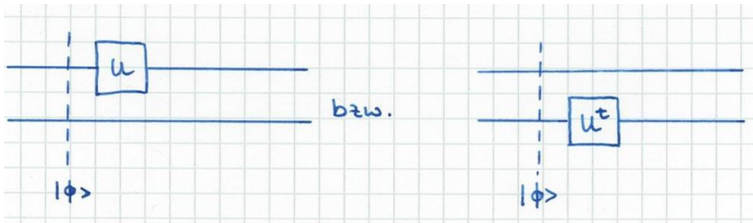
a.) Es sei $\begin{pmatrix} u & w \\ v & z \end{pmatrix}$ unitäre Transformation eines QBits. Die Wirkung auf die Basiszustände ist also

$|0\rangle \mapsto u|0\rangle + v|1\rangle$ und $|1\rangle \mapsto w|0\rangle + z|1\rangle$.

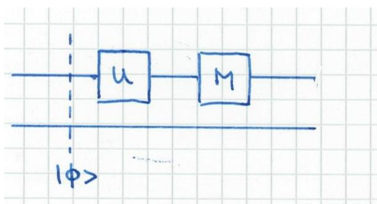
Es sei $\begin{pmatrix} u & v \\ w & z \end{pmatrix}^t$ die transponierte unitäre Transformation. Die Wirkung auf die Basiszustände ist also

$|0\rangle \mapsto u|0\rangle + w|1\rangle$ und $|1\rangle \mapsto v|0\rangle + z|1\rangle$. (Weiter auf der nächsten Seite)

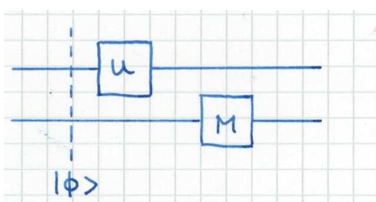
Bitte zeigen Sie, dass das Ergebnis der folgenden beiden Quantenschaltkreise, angewandt auf den Zustand $|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ identisch ist:



b.) Es sei nun Es sei $\begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix}$ eine unitäre Transformation mit reellen Einträgen eines QBits. Wieder wird U auf das erste QBit eines Quantenregisters im verschränkten Zustand $|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ angewandt. Anschließend wird das erste QBit gemessen: Was ist das Ergebnis?



c.) Was ist das Ergebnis, wenn in b. statt des ersten das zweite QBit gemessen wird?



d.) Bitte überzeugen Sie sich, dass in b. und c. die Information über die Transformation beim nicht gemessenen QBit verbleibt - auch, wenn es nicht das transformierte QBit ist.

e.) Wie ändert sich die Situation aus b., c. und d., wenn die unitäre Transoformation die Gestalt $\begin{pmatrix} u & v \\ v & -u \end{pmatrix}$ hat (u und v sind wieder reell)?

Viel Spass und Erfolg!