Quantencomputing - Übungsblatt 6

weiter zu „3. Erste Quantenalgorithmen“

Technische Hochschule Mittelhessen, Fachbereich MNI, Prof. Dr. B. Just

Aufgabe17

Bitte beweisen Sie die Korrektheit des Algorithmus zur dichten Codierung.

Aufgabe 18

Die Hadamard-Matrix H_1 eines Quantenregisters mit einem QBit ist definiert als $H_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Die Hadamard-Matrix H_n eines Quantenregisters mit n QBits ist das $n-$fache Tensorprodukt von H_1, also eine $2^n \times 2^n$-Matrix. Bitte zeigen Sie die folgenden Eigenschaften von H_n für alle $n \in \mathbb{N}$:

a.) $H_n^t = H_n$.

b.) $H_n \cdot H_n = E_{2^n}$.

c.) Alle Einträge von H_n sind $\frac{1}{\sqrt{2^n}}$ oder $-\frac{1}{\sqrt{2^n}}$

d.) Die erste Zeile von H_n enthält nur positive Elemente.

e.) Jede Zeile außer der ersten enthält gleich viele positive wie negative Elemente.

f.) Was steht genau an Position i, j von H_n? Hier ist die Antwort.
Es seien $0 \leq i, j \leq 2^n - 1$, und $x, y \in \{0,1\}^n$ die rückwärts gelesenen Koeffizienten ihrer Binärdarstellung:

$$i = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot 2^{n-k}, \quad j = \sum_{k=1}^{n} y_k \cdot 2^{n-k}.$$

Es bezeichne $x \cdot y$ das Skalarprodukt von x und y modulo 2, also
$x \cdot y = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \bmod 2$.
Bitte zeigen Sie: Dann ist

$$(H_n)_{i,j} = (-1)^{x \cdot y} \cdot \frac{1}{\sqrt{2^n}} \quad .$$

... auf der Rückseite geht es weiter :)

Aufgabe 19

a.) Bitte beweisen Sie die Korrektheit des Algorithmus von Deutsch-Jozsa im Fall $n = 1$. (Der Fall $n = 1$ wurde schon 1985 von Deutsch gelöst, der entsprechende Algorithmus heißt „Algorithmus von Deutsch“. Dieser Algorithmus hat zahlreiche weitere Quantenalgorithmen inspiriert.)

b.) Bitte beweisen Sie die Korrektheit des Algorithmus von Deutsch-Jozsa im Fall $n = 3$.

c.) Bitte beweisen Sie die Korrektheit des Algorithmus von Bernstein-Vazirani im Fall $n = 3$.

Programm: Die Hadamard-Matrix für n QBits - WÄHREND Aufgabe 17

a.) Bitte schreiben Sie eine Funktion Hadamard, die bei Input von $n\ in \mathbb{N}$ die Hadamard-Matrix H_n auf n Qbits berechnet.

Bei Input $n = 1$ ist das die Matrix

$$H_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Bei Input von $n > 1$ ist H_n das Tensorprodukt aus n solchen $H_1 -$ Matrizen, also eine $2^n \times 2^n$-Matrix.

b.) Erzeugen Sie die Hadamard-Matrizen für einige (kleine) n und verifizieren Sie die Aussagen aus Aufgabe 17.

Programm: Quantenorakel und der Algorithmus von Deutsch-Jozsa - WÄHREND Aufgabe 18

a.) Bitte schreiben Sie für den Fall $n = 1$ die Orakel für die 4 möglichen Funktionen auf einem Qbit (falls noch nicht geschehen), und nehmen Sie sie in Ihr setgates-Script auf.

b.) Bitte verifizieren Sie den Algorithmus von Deutsch-Jozsa für alle 4 Funktionen.

c.) Bitte schreiben Sie für den Fall $n = 3$ die Orakel für die beiden konstanten Funktionen, und ein (oder zwei) Orakel für eine (oder zwei) beliebig wilde, jedoch balancierte, boolesche Funktionen auf $\{0, 1\}^3$ (Sie können die Orakel auch untereinander austauschen).

d.) Bitte verifizieren Sie den Algorithmus von Deutsch-Jozsa für die Funktionen aus Teil c.).

Viel Spass und Erfolg!