

Quantencomputing - Übungsblatt 7

zu „4. Grover-Iteration“

Technische Hochschule Mittelhessen, Fachbereich MNI, Prof. Dr. B. Just

Aufgabe 20

Es sei $D_8 = (d_8)_{i,j}$ die 8×8 -Matrix, die wie folgt definiert ist:

$$(d_8)_{i,j} = \begin{cases} -3/4, & \text{wenn } i = j \\ 1/4, & \text{wenn } i \neq j. \end{cases}$$

Es ist also $D_8 = -E_8 + \frac{2}{8} 1_8$, wobei E_8 die 8×8 -Einheitsmatrix ist, und 1_8 die 8×8 -Matrix, die nur aus Einsen besteht.

Bitte zeigen Sie:

a.) D_8 ist unitär

b.) Für jeden Koeffizientenvektor $(\alpha_0, \dots, \alpha_7) \in \mathbb{R}^8$ spiegelt die lineare Abbildung, die durch D_8 beschrieben wird, jeden Koeffizienten am Mittelwert

$m_\alpha = \sum_i \alpha_i / 8$, d.h.

$$D_8 \cdot \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_0 + 2m \\ -\alpha_1 + 2m \\ \vdots \\ -\alpha_7 + 2m \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 21

(Verallgemeinerung von Aufgabe 20)

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $N = 2^n$. Es sei $D_N = (d_N)_{i,j}$ die $N \times N$ -Matrix, die wie folgt definiert ist:

$$(d_N)_{i,j} = \begin{cases} -1 + \frac{2}{N}, & \text{wenn } i = j \\ \frac{2}{N}, & \text{wenn } i \neq j. \end{cases}$$

Es ist also $D_N = -E_N + \frac{2}{N} 1_N$, wobei E_N die $N \times N$ -Einheitsmatrix ist, und 1_N die $N \times N$ -Matrix, die nur aus Einsen besteht.

Bitte zeigen Sie:

a.) D_N ist unitär

b.) Für jeden Koeffizientenvektor $(\alpha_0, \dots, \alpha_{N-1}) \in \mathbb{R}^N$ spiegelt die lineare Abbildung, die durch D_N beschrieben wird, jeden Koeffizienten am Mittelwert

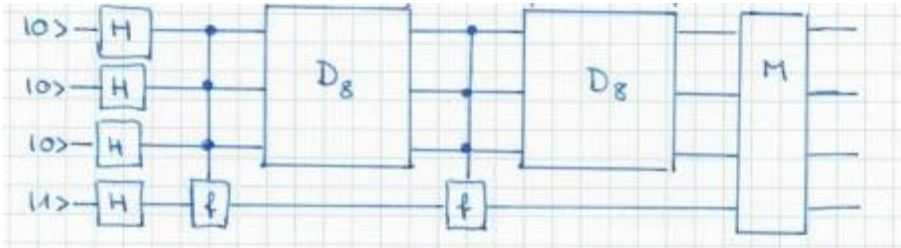
$m_\alpha = \sum_i \alpha_i / N$, d.h.

$$D_N \cdot \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_0 + 2m \\ -\alpha_1 + 2m \\ \vdots \\ -\alpha_{N-1} + 2m \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 22

Es sei $f : \{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}$ eine Funktion, die überall den Wert 0 annimmt, außer bei genau einem Input $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$, bei dem gilt $f(\hat{x}) = 1$.

a.) Bitte zeigen Sie, dass der folgende Quantenschaltkreis mit Wahrscheinlichkeit $\frac{121}{128}$ einen der Zustände $|\hat{x}_1\hat{x}_2\hat{x}_30\rangle$ oder $|\hat{x}_1\hat{x}_2\hat{x}_31\rangle$ liefert:



b.) Bitte zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit für einen der Zustände $|\hat{x}_1\hat{x}_2\hat{x}_30\rangle$ oder $|\hat{x}_1\hat{x}_2\hat{x}_31\rangle$ kleiner als $\frac{121}{128}$ ist, wenn vor dem Messen nur einmal oder dreimal das Quantenorakel, gefolgt von D_8 , angewandt wird.

Aufgabe 23

Bitte illustrieren Sie die Idee des „Katapults“ im Grover-Algorithmus maßstabsgetreu für den Fall $n = 3$, also $N = 8$.

Aufgabe 24

Bitte beweisen Sie für den Fall $n = 5$, $N = 32$ und $|\hat{x}\rangle = |00011\rangle$:

Der Grover Algorithmus liefert mit 4 Aufrufen des Datenbankorakels den richtigen Wert für $|\hat{x}\rangle$ mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit kleiner als $1/32$.

Bemerkung: Es geht hier nicht darum, alle Zwischenzustände auszurechnen :-). Auch nicht darum festzustellen, dass es einfach die Aussage aus der Vorlesung für $n = 5$ ist :-). Es geht darum, die wesentlichen Schritte der Analyse des Grover-Algorithmus für beliebiges n aus der Vorlesung nachzuvollziehen.

... es kommen noch Programmieraufgaben

Programmieraufgaben

Programm: Grover-Iteration I - WÄHREND Aufgabe 22

- a.) Bitte schreiben Sie für den Fall $n = 3$ die Orakel für eine boolesche Funktion auf $\{0, 1\}^3$, die an genau einer Stelle 1 ist, und sonst 0 (und nehmen Sie sie in Ihr setgates-Script auf).
- b.) Bitte nehmen Sie die unitäre Transformation D_8 in Ihr setgates-Script auf.
- c.) Verifizieren Sie mit den Transformationen aus a.) und b.) die Aussagen aus Aufgabe 21 :).

Programm: Grover-Iteration II - WÄHREND Aufgabe 24

Bitte lassen Sie Ihrem Spieltrieb freien Lauf und schreiben Sie alle Programme, die Ihnen helfen, den Grover-Algorithmus für den Fall $n = 5$ nachzuvollziehen, wenn er auf die boolesche Funktion aus Aufgabe 24 angewandt wird.

Viel Spass und Erfolg!