Der Gaußsche Algorithmus

Von Karl Friedrich Gauß (1777-1855) stammt das nach ihm benannte Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme mit n Unbekannten:

$$
\begin{array}{llr}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1j} x_j + \dots + a_{1n} x_n = b_1 & [\,1\,] & \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2j} x_j + \dots + a_{2n} x_n = b_2 & [\,2\,] & \\
\vdots & \vdots & \\
a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{ij} x_j + \dots + a_{in} x_n = b_i & [\,i\,] & \textbf{GLS (1)} \\
\vdots & & \\
a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nj} x_j + \dots + a_{nn} x_n = b_n & [\,n\,] &
\end{array}
$$

– in Matrizenschreibweise: $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$

Ein System von n voneinander linear unabhängigen Gleichungen besitzt eine eindeutige Lösung $\underline{x}^T = [\, x_1, x_2, \dots, x_n \,]$, die mit diesem Verfahren ermittelt werden kann.

Wichitge Eigenschaften linearer Gleichungssysteme, die dabei zur Anwendung kommen, besagen, daß sich die Lösung eines Gleichungssystemes nicht ändert, wenn

- Gleichungen in ihrer Reihenfolge (Zeilen von $\underline{A}$ und $\underline{b}$) vertauscht werden,
- Unbekannten umbenannt (Spalten von $\underline{A}$ vertauscht) werden,
- Gleichungen (Zeilen von $\underline{A}$ und $\underline{b}$) mit einer Konstanten multipliziert werden,
- Gleichungen durch Linearkombinationen ihrer selbst mit anderen Gleichungen ersetzt werden.

Die wichtigsten Schritte des Gaußschen Verfahrens sind die Elimination und die Rücksubstitution.

1.1 Elimination

Das o.a. System der lin. Gln. [1] bis [n] wird sukzessive in ein gestaffeltes Gleichungssystem übergeführt. Dazu werden zunächst geeignete Vielfache der 1. Gleichung von allen restlichen subtrahiert, so daß die Koeffizienten der 1. Unbekannten für die 2. und die darauffolgenden Gleichungen zu Null werden. Dann treten z.B. an die Stelle der Gln. [1], [2] und [n] entsprechend Gl.[1], Gl.[2]–Gl.[1]$\cdot a_{21}/a_{11}$ und Gl.[n]–Gl.[1]$\cdot a_{n1}/a_{11}$:

$$
\begin{array}{llllllll}
a_{11} & x_1 + & a_{12} & x_2 + \ldots + & a_{1n} & x_n = & b_1 \\
(a_{21} - a_{11}a_{21}/a_{11}) & x_1 + & (a_{22} - a_{12}a_{21}/a_{11}) & x_2 + \ldots + & (a_{2n} - a_{1n}a_{21}/a_{11}) & x_n = & b_2 - b_1a_{21}/a_{11} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
(a_{n1} - a_{11}a_{n1}/a_{11}) & x_1 + & (a_{n2} - a_{12}a_{n1}/a_{11}) & x_2 + \ldots + & (a_{nn} - a_{1n}a_{n1}/a_{11}) & x_n = & b_n - b_1a_{n1}/a_{11}
\end{array}
$$

bzw., nach kurzer Umrechnung ($a'_{1j}=a_{1j}$, $b'_1=b_1$; $a'_{ij}=a_{ij}-a_{1j}\bullet a_{i1}/a_{11}$, $b'_i=b_i-b_1\bullet a_{i1}/a_{11}$, $i=2,\ldots n$, $j=1,\ldots,n$):

$$
\begin{array}{lllllllllll}
a'_{11} & x_1 & + & a'_{12} & x_2 & + \ldots + & a'_{1n} & x_n & = & b'_1 & [1'] \equiv [1] \\
0 & x_1 & + & a'_{22} & x_2 & + \ldots + & a'_{2n} & x_n & = & b'_2 & [2'] \\
\vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
0 & x_1 & + & a'_{n2} & x_2 & + \ldots + & a'_{nn} & x_n & = & b'_n & [n']
\end{array}
\qquad \textbf{GLS (2)}
$$

Dann werden geeignete Vielfache der 2. Gleichung von der 3. und den folgenden subtrahiert, so daß in ihnen die Koeffizienten der 2. Unbekannten zu Null werden:

$$
\begin{array}{lllllll}
a'_{11} & x_1 + & a'_{12} & x_2 + \ldots + & a'_{1n} & x_n = & b'_1 \\
0 & x_1 + & a'_{22} & x_2 + \ldots + & a'_{2n} & x_n = & b'_2 \\
0 & x_1 + & (a'_{32} - a'_{22}a'_{32}/a'_{22}) & x_2 + \ldots + & (a'_{3n} - a'_{2n}a'_{32}/a'_{22}) & x_n = & b'_3 - b'_2a'_{32}/a'_{22} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & x_1 + & (a'_{n2} - a'_{22}a'_{n2}/a'_{22}) & x_2 + \ldots + & (a'_{nn} - a'_{2n}a'_{n2}/a'_{22}) & x_n = & b'_n - b'_2a'_{n2}/a'_{22}
\end{array}
$$

bzw., nach kurzer Umrechnung:

$$
\begin{array}{lllllllllll}
a''_{11} & x_1 & + & a''_{12} & x_2 & + \ldots + & a''_{1n} & x_n & = & b''_1 & [1''] \equiv [1] \\
0 & x_1 & + & a''_{22} & x_2 & + \ldots + & a''_{2n} & x_n & = & b''_2 & [2''] \equiv [2'] \\
0 & x_1 & + & 0 & & & a''_{3n} & x_n & = & b''_3 & [3''] \\
\vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
0 & x_1 & + & 0 & x_2 & + \ldots + & a''_{nn} & x_n & = & b''_n & [n'']
\end{array}
\qquad \textbf{GLS (3)}
$$

Dieses Vorgehen wird solange fortgesetzt, bis schließlich die letzte Gleichung nur noch von x_n abhängt:

$$
\begin{array}{lllllllll}
a^{(n)}_{11} & x_1 & + & a^{(n)}_{12} & x_2 & + \ldots + & a^{(n)}_{1n} & x_n = & b^{(n)}_1 & [1^{(n-1)}] \equiv [1] & \\
0 & x_1 & + & a^{(n)}_{22} & x_2 & + \ldots + & a^{(n)}_{2n} & x_n = & b^{(n)}_2 & [2^{(n-1)}] \equiv [2'] & \\
0 & x_1 & + & 0 & & & a^{(n)}_{3n} & x_n = & b^{(n)}_3 & [3^{(n-1)}] \equiv [3''] & \textbf{GLS (n)} \\
: & & & : & & & : & & : & : & \\
0 & x_1 & + & 0 & x_2 & + \ldots + & a^{(n)}_{nn} & x_n = & b^{(n)}_n & [n^{(n-1)}] &
\end{array}
$$

Das bedeutet, daß (mit Ausnahme von x_n) die Unbekannten sukzessive von den Gleichungen eliminiert werden; dies gab diesem Algorithmus den ebenso gebräuchlichen Namen **Eliminationsverfahren**. Seine Anwendung setzt voraus, daß in der Hauptdiagonalen der Matrix $\underline{A}$ keine Elemente verschwinden. Ist dies nicht der Fall, müssen zuvor Spalten von $\underline{A}$ so untereinander vertauscht werden, daß diese Forderung erfüllt ist.

1.2 Rücksubstitution

Nach erfolgter Überführung der Gleichungen [1] bis [n] in ein gestaffeltes Gleichungssystem enthält die letzte Gleichung nur noch x_n, was eine Lösung durch einfache Umformung ermöglicht. Einsetzen des damit errechneten x_n-Wertes in die darüberliegende Gleichung [n-1] führt dazu, daß diese nur noch von x_{n-1} abhängt und somit in gleicher Weise wie Gl [n] lösbar ist.

Mit dieser Vorgehensweise können nacheinander alle Lösungen des Gleichungssystems (in umgekehrter Reihenfolge x_n ... x_1) ermittelt werden, indem in den Gln. [n]... [1] die Unbekannten durch die zuvor gefundenen Ausdrücke (Werte) ersetzt (substituiert) werden.