

# 2D-Punkt-Transformationen

Zur Erinnerung – Drehung eines beliebigen Punktes  $B'$  um den Winkel  $\theta$  um den Koordinaten-Ursprung zum Punkt  $B''$ :

$$x_{B'} = r \cdot \cos \alpha$$

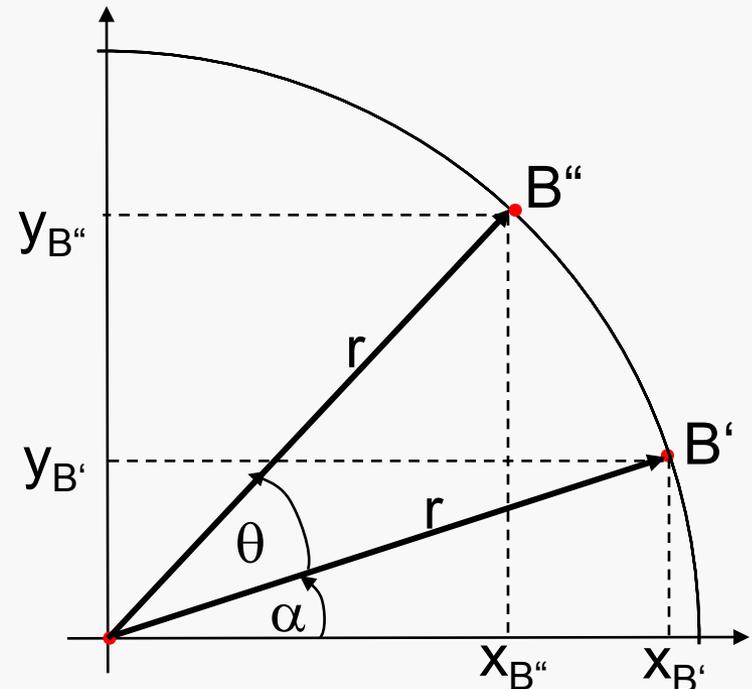
$$y_{B'} = r \cdot \sin \alpha \quad [r, \alpha: \text{Hilfsgrößen}]$$

$$\begin{aligned} x_{B''} &= r \cdot \cos(\alpha + \theta) \\ &= r \cdot (\cos \alpha \cos \theta - \sin \alpha \sin \theta) \\ &= x_{B'} \cdot \cos \theta - y_{B'} \cdot \sin \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{B''} &= r \cdot \sin(\alpha + \theta) \\ &= r \cdot (\sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta) \\ &= x_{B'} \cdot \sin \theta + y_{B'} \cdot \cos \theta \end{aligned}$$

In Matrizen-Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} x_{B''} \\ y_{B''} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{B'} \\ y_{B'} \end{pmatrix}$$



$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

# 2D-Punkt-Transformationen

Verallgemeinerung: Rotation eines beliebigen Punktes B um den Winkel  $\theta$  um einen beliebigen Punkt C zum Punkt B<sup>''</sup>. Skalierung des Ergebnisses mit den Faktoren  $s_x$  und  $s_y$ .

$$x_{B'} = x_B - x_C$$

$$y_{B'} = y_B - y_C$$

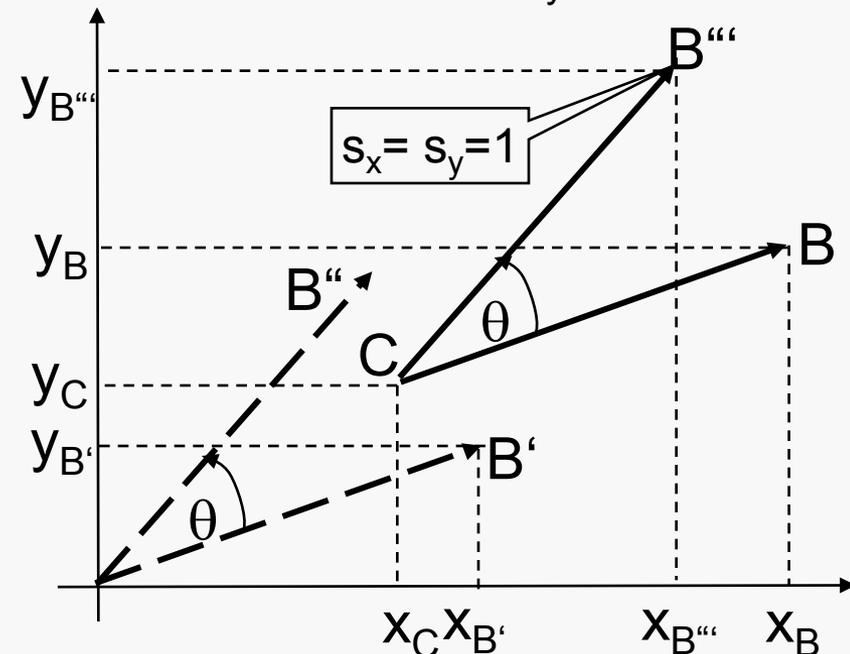
$$x_{B''} = x_{B'} \cdot \cos\theta - y_{B'} \cdot \sin\theta$$

$$y_{B''} = x_{B'} \cdot \sin\theta + y_{B'} \cdot \cos\theta$$

$$x_{B'''} = s_x \cdot (x_{B''} + x_C)$$

$$y_{B'''} = s_y \cdot (y_{B''} + y_C)$$

In Matrizen-Schreibweise:



$$\begin{pmatrix} x_{B'''} \\ y_{B'''} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} \right) \right\}$$

Erweiterung um eine Dimension ermöglicht die Darstellung der Translation (Verschiebung) als Matrizen-Produkt:

$$x_{B'} = x_B - x_C$$

$$y_{B'} = y_B - y_C$$

„homogene Koordinaten“,  
„homogene Punkt-Darstellung“

$$\begin{pmatrix} x_{B'} \\ y_{B'} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_C \\ 0 & 1 & -y_C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ 1 \end{pmatrix}$$

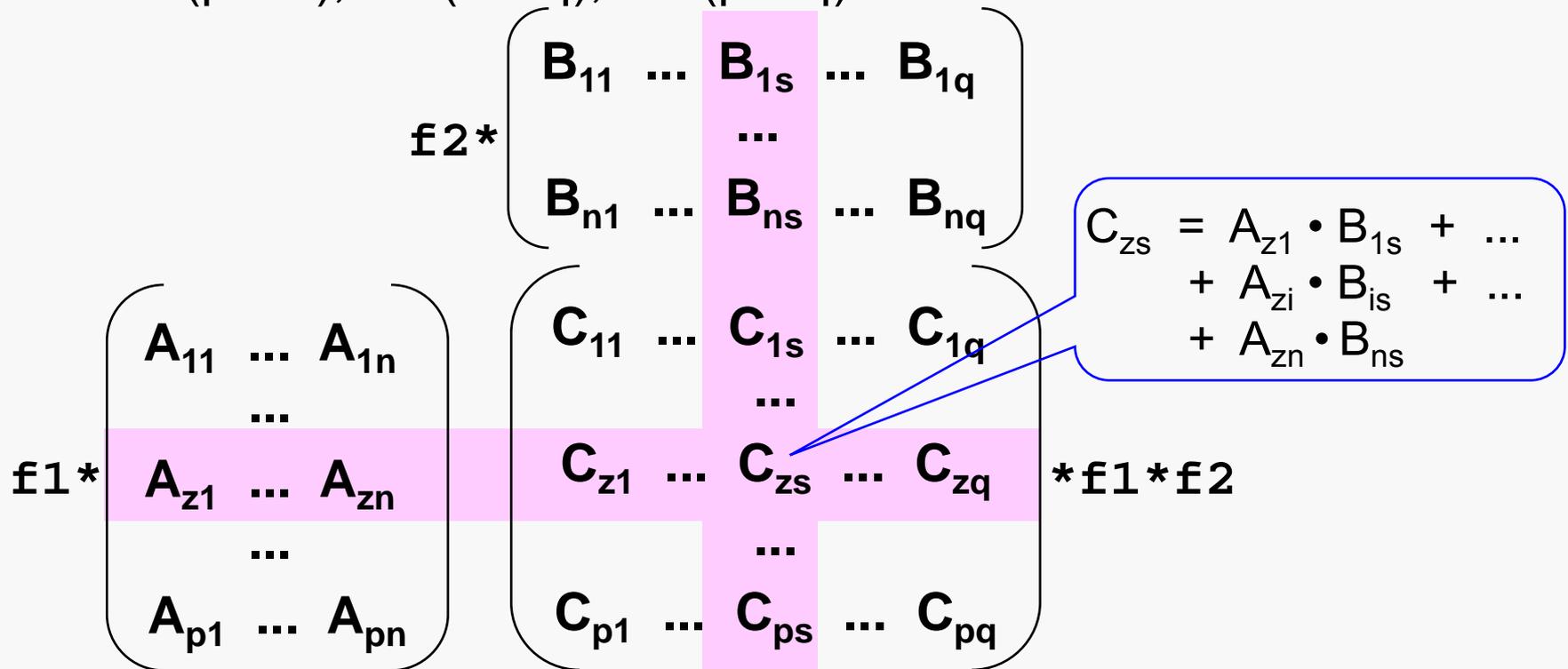
Rotation eines Punktes B um  $\theta$  um bel. Punkt C nach B'' und Skalierung mit  $s_x$ ,  $s_y$  in homogenen Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} x_{B'''} \\ y_{B'''} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_C \\ 0 & 1 & y_C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_C \\ 0 & 1 & -y_C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ 1 \end{pmatrix}$$

# 2D-Punkt-Transformationen

Implementierungshinweis zum Matrizenprodukt  $\underline{C} = \underline{A} \cdot \underline{B}$ :

A: (p x n); B: (n x q); C: (p x q)



```

C[z][s] = 0.; // Initialisiererg
for (i=1; i<=n; i++) C[z][s] += A[z][i]*B[i][s];
    
```

- Codierungshinweis zum Matrizenprodukt  $\underline{A} \cdot \underline{B}$  in C/C++:  
A: (p x n); B: (n x q); C: (p x q)  
Matrizen-Deklaration darf max. 1 Dimension offen lassen:

```
#define COL 3
```

```
float matrix[][COL]; // 1. Index (v.li.) offen
```

Größere Flexibilität mit eindimensionalen Feldern und Umschreibung:

$$C[z][s] \Rightarrow C[z*q+s]$$

- Zur Erinnerung – einige Rechenregeln d. Matrizenrechnung\*:

$$\underline{A} + \underline{B} = \underline{B} + \underline{A} \quad [\text{Kommutativgesetz d. Matrizenaddition}]$$

$$\underline{A} \cdot (\underline{B} + \underline{C}) = \underline{A} \cdot \underline{B} + \underline{A} \cdot \underline{C} \quad [\text{Distributivgesetz}]$$

$$(\underline{A} \cdot \underline{B}) \cdot \underline{C} = \underline{A} \cdot (\underline{B} \cdot \underline{C}) \quad [\text{Assoziativgesetz}]$$

$$\underline{A} \cdot \underline{B} \neq \underline{B} \cdot \underline{A} \quad [\text{Matrizenprodukt ist nicht kommutativ!}]$$

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{0} \quad \not\leftrightarrow \quad \underline{B} = \underline{0} \vee \underline{A} = \underline{0} !$$

$$\underline{A} \cdot \underline{I} = \underline{I} \cdot \underline{A} = \underline{A} \quad [\underline{I}: \text{„neutrales Element“ d.M.-Multiplikation}]$$

$$\underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{A} = \underline{I} \quad (\text{falls } \underline{A} \text{ invertierbar!})$$

$$\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b} \Rightarrow \underline{A}^{-1} \cdot \underline{b} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{x} \quad (\text{falls } \underline{A} \text{ invertierbar!})$$

$$(\underline{A} \cdot \underline{B})^{-1} = \underline{B}^{-1} \cdot \underline{A}^{-1} \quad (\text{falls } \underline{A}, \underline{B} \text{ invertierbar!})$$

$$(\underline{A} \cdot \underline{B})^T = \underline{B}^T \cdot \underline{A}^T$$

Wichtiger Spezialfall: Rotationsmatrizen sind orthogonal, d.h.

$$\underline{Q}^{-1} = \underline{Q}^T$$

(\*) unter d. Voraussetzung geeigneter Dimensionierung beteiligter Matrizen

# 2D-Punkt-Transformationen

Verkettung von Punkt-Transformationen und ihren Inversen:

- Translation (Verschiebung): 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_c \\ 0 & 1 & -y_c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_c \\ 0 & 1 & y_c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_c - x_c \\ 0 & 1 & y_c - y_c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Skalierung: 
$$\begin{pmatrix} 1/s_x & 0 & 0 \\ 0 & 1/s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Spiegelung ist ein Spezialfall der Skalierung!

- Rotation (Drehung): 
$$\begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) & 0 \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(-\theta)\cos\theta - \sin(-\theta)\sin\theta & -\cos(-\theta)\sin\theta - \sin(-\theta)\cos\theta & 0 \\ \sin(-\theta)\cos\theta + \cos(-\theta)\sin\theta & -\sin(-\theta)\sin\theta + \cos(-\theta)\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beobachtungen an der Rotationsmatrix:  
(vor allem an der o./li. 2x2-Untermatrix)

$$\underline{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

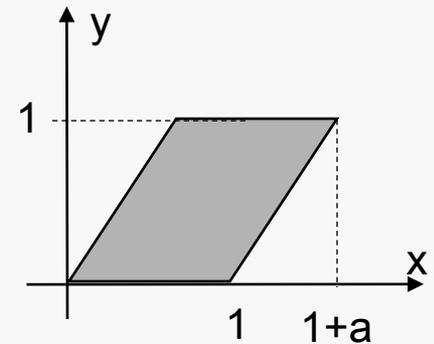
- Jede Zeile u. jede Spalte ist ein Einheitsvektor (Länge=1)
- Sowohl die Zeilen- als auch die Spaltenvektoren stehen jeweils senkrecht aufeinander (Skalarprodukte =0)
- ➔  $\mathbf{R}$  ist orthogonal:  $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} = \underline{\mathbf{I}}$   
(<sup>T</sup>:Transposition;  $\mathbf{I}$ : Einheitsmatrix)
- Werden die Einheitsvektoren der Hauptachsen (x,y) mit  $\mathbf{R}$  transformiert, so ergeben sie die Spaltenvektoren von  $\mathbf{R}$ .
- Werden die Zeilenvektoren von  $\mathbf{R}$  mit  $\mathbf{R}$  transformiert, so ergeben sie die Einheitsvektoren der Hauptachsen (x,y).
- ➔ Möglichkeit, aus dem Rotationsergebnis auf die Rotationsmatrix zu schließen!

## Weitere 2D-Transformation: Scherung (engl. *shear*)

Scherung entlang einer Achse verändert dazugehörige Punkt-Koordinaten proportional zur jeweils anderen Koordinate:

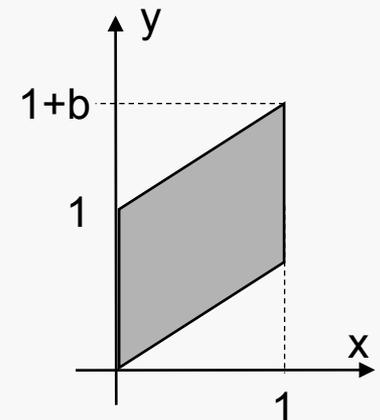
- Scherung eines Einheitsquadrats entlang der x-Achse verändert jeden Punkt  $[x, y, 1]^T$  zu

$[x+ay, y, 1]^T$  mit: 
$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
 Inverse: 
$$\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



- Scherung des Einheitsquadrats entlang der y-Achse verändert jeden Punkt  $[x, y, 1]^T$  zu

$[x, bx+y, 1]^T$  mit: 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
 Inverse: 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



x-y-Kombination  
als Verkettung!

## Window-Viewport-Transformation

Alte Begriffe der Computergrafik:

- (World-Coordinate-) **Window** heißt ein rechteckiger (Szene-, Welt-) Ausschnitt, der abgebildet werden soll; darf nicht mit dem (Window-Manager-) Window des Sw-Fenstersystems verwechselt werden.
- **Viewport** nennt man den rechteckigen Ausschnitt der Geräte-Ausgabefläche (Bildschirm, Plotter), in dem die Ausgabe erfolgen soll.

Im allgemeinen Fall besteht die Window-Viewport-Transform. aus

- einer Translation des Window an den Ursprung des Welt-Koordinatensystems,
- einer Skalierung auf die Größe des Viewport und
- einer Translation an die Lage des Viewport.

**Übung:** Erstellung einer Analog-Uhr aus ASCII-Zeichen der Größe 8x12:

- (i) Zeichnung und Positionierung der Zeiger als Linien;
- (ii) Realitätsnahe Animation.

Durch entsprechende Skalierung ist die Uhr auf eine kreisrunde Form zu bringen.

BresenClock.exe

