3D-Punkt-Transformationen

3D-Punkt-Transformationen und ihre Inversen:

- Translation:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -t_x \\ 0 & 1 & 0 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 & -t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Skalierung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Scherung: (entlang x)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -q & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & q & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

evtl.beteiligte Elemente nach Verkettung mehrerer eindimens. Scherungen

3D-Punkt-Transformationen

Reihenfolge der Transformationen entscheidend – z.B.:

- Skalierung mit anschließender Translation:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & t_x \\ 0 & s_y & 0 & t_y \\ 0 & 0 & s_z & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Translation mit anschließender Skalierung:

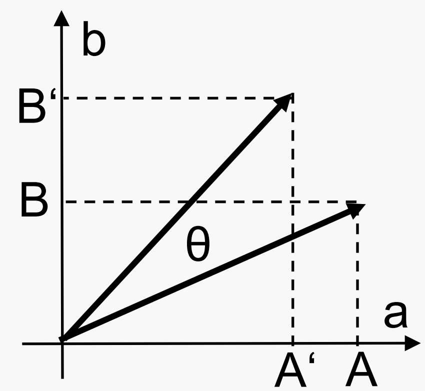
$$\begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & s_x t_x \\ 0 & s_y & 0 & s_y t_y \\ 0 & 0 & s_z & s_z t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[s.o.: Das Matrizenprodukt ist nicht kommutativ!]

3D-Punkt-Transformationen

- Verwendung eines Rechts-Systems (in der CG wählbar): Rotation positiv gegen d. Uhrzeigersinn bei Blickrichtung vom positiven Teil der Rotationsachse zum Koordinaten-Ursprung

- Herleitung der Rotationsmatrizen (s.o.):
  $A' = A \cdot \cos\theta - B \cdot \sin\theta$
  $B' = A \cdot \sin\theta + B \cdot \cos\theta$



- Rotation um die x-Achse:
  (a ⇨ y; b ⇨ z)

  Nicken (engl. *pitch*)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x & 0 \\ 0 & \sin\theta_x & \cos\theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Rotation um die y-Achse:
  (a ⇨ z; b ⇨ x)

  Gieren (engl. *yaw*)

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

„Rechte-Hand-Regel"

3D-Punkt-Transformationen

- Rotation um die z-Achse (vgl. 2D):
  (a ⇨ x; b ⇨ y)

  Rollen (engl. *roll*)

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_z & -\sin\theta_z & 0 & 0 \\ \sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beobachtungen an den Rotationsmatrizen:

- Die letzte Spalte ist gleich jener einer Einheitsmatrix (Platz für Translationswerte).
- Zeile und Spalte, die der jeweiligen Drehachse entsprechen, sind identisch mit der Zeile u. der Spalte einer Einheitsmatrix

  (d.h.: keine Veränderung für diese Koordinate).
- Besonders interessanter Spezialfall:

  Rotation um Achse durch den Koordinaten-Ursprung und einen beliebigen Punkt

3D-Punkt-Transformationen

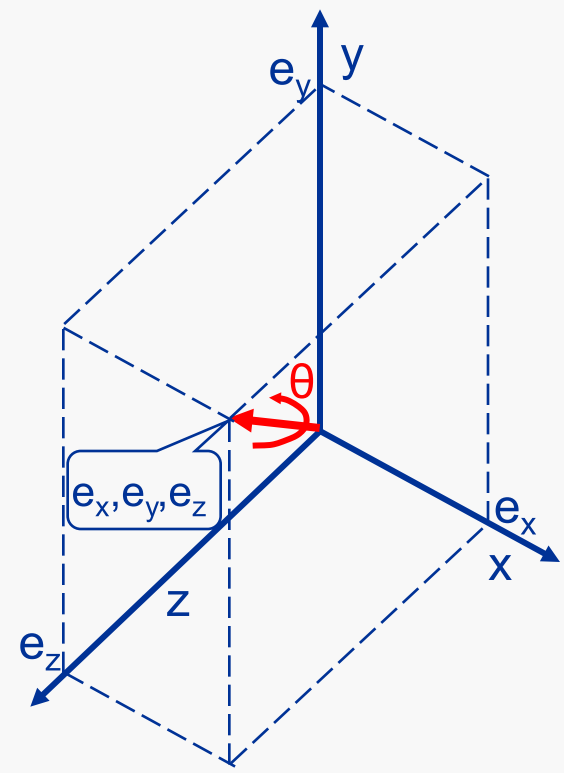
Prof. Dr. Aris Christidis • SS 2017

Herleitung:

Rotation um Winkel θ um eine beliebige Raumachse durch den Koordinaten-Ursprung $[0,0,0,1]^T$ u. d. Punkt $[e_x,e_y,e_z 1]^T$, $e_x^2+e_y^2+e_z^2=1$

Vorgehen in 3 Schritten:

1. Transformation der gewünschten Achse auf eine der Hauptachsen
2. Rotation um die so transformierte Achse
3. Rücktransformation der Achse an ihren ursprünglichen Ort



[Herleitung hier:

- Rotation der Drehachse um die z-Achse bis zur y-z-Ebene, dann um die x-Achse, bis sie mit der z-Achse zusammenfällt,
- Rotation um θ um die z-Achse,
- Rücktransformation;

Ergebnis bleibt von dieser Wahl unberührt.]

- Rotation der Drehachse um den Winkel α ($\alpha \geq 0$) um die z-Achse bis zur y-z-Ebene:

  $\sin\ \alpha = e_x / (e_x^2+e_y^2)^{1/2}$

  $\cos\ \alpha = e_y / (e_x^2+e_y^2)^{1/2}$

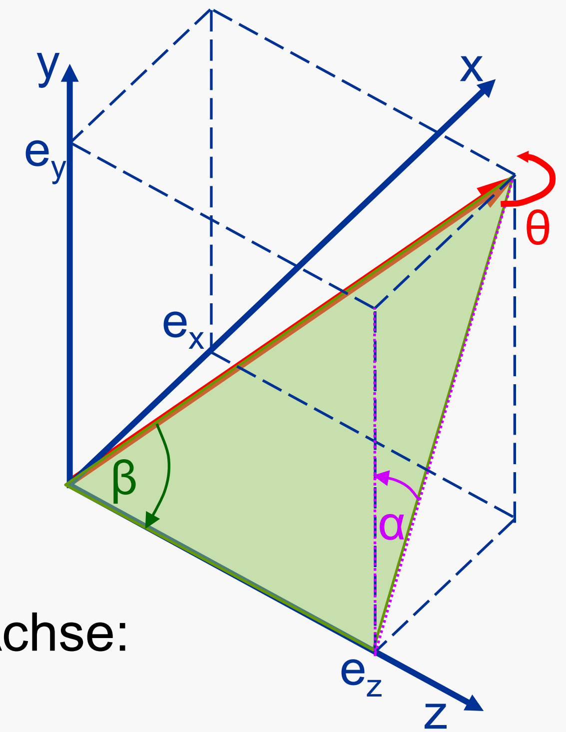
- Rotation der Drehachse um den Winkel β ($\beta \geq 0$) um die x-Achse bis zur z-Achse:

  $\sin\ \beta = (e_x^2+e_y^2)^{1/2} / (e_x^2+e_y^2+e_z^2)^{1/2}$

  $\quad\quad = (e_x^2+e_y^2)^{1/2}$

  $\cos\ \beta = e_z / (e_x^2+e_y^2+e_z^2)^{1/2}$

  $\quad\quad = e_z$



- Rotationsmatrix zur Drehung um die neue z-Achse:

$$\underline{R}(\theta) = \underline{R}_z(-\alpha) \cdot \underline{R}_x(-\beta) \cdot \underline{R}_z(\theta) \cdot \underline{R}_x(\beta) \cdot \underline{R}_z(\alpha)$$
$$= \underline{R}_z(\alpha)^{-1} \cdot \underline{R}_x(\beta)^{-1} \cdot \underline{R}_z(\theta) \cdot \underline{R}_x(\beta) \cdot \underline{R}_z(\alpha)$$
$$= \underline{R}_z(\alpha)^T \cdot \underline{R}_x(\beta)^T \cdot \underline{R}_z(\theta) \cdot \underline{R}_x(\beta) \cdot \underline{R}_z(\alpha)$$
$$= [\underline{R}_x(\beta) \cdot \underline{R}_z(\alpha)]^T \cdot \underline{R}_z(\theta) \cdot [\underline{R}_x(\beta) \cdot \underline{R}_z(\alpha)]$$

Anmerkungen:

- Die Berechnung von $\underline{R}(\theta) = [\underline{R}_x(\beta)\cdot\underline{R}_z(\alpha)]^T\cdot\ \underline{R}_z(\theta)\ \cdot[\underline{R}_x(\beta)\cdot\underline{R}_z(\alpha)]$ erfordert nur drei Matrizenprodukte und eine Transposition.
- Ausmultipliziert lautet die Transformationsmatrix für die Rotation um den Winkel θ um eine beliebige Raumachse durch den Koordinaten-Ursprung und den Punkt $[e_x, e_y, e_z,1]^T$, mit $e_x^2+e_y^2+e_z^2=1$:

$$\begin{pmatrix} e_x^2+(1-e_x^2)\cdot\cos\theta & e_x\cdot e_y\cdot(1-\cos\theta) - e_z\cdot\sin\theta & e_x\cdot e_z\cdot(1-\cos\theta)+e_y\cdot\sin\theta & 0 \\ e_x\cdot e_y\cdot(1-\cos\theta)+e_z\cdot\sin\theta & e_y^2+(1-e_y^2)\cdot\cos\theta & e_y\cdot e_z\cdot(1-\cos\theta) - e_x\cdot\sin\theta & 0 \\ e_x\cdot e_z\cdot(1-\cos\theta) - e_y\cdot\sin\theta & e_y\cdot e_z\cdot(1-\cos\theta)+e_x\cdot\sin\theta & e_z^2+(1-e_z^2)\cdot\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Hat der Richtungsvektor $[X,Y,Z]^T$ der Raumachse einen Betrag ≠1, so ist er zu normieren auf $[X,Y,Z]^T \cdot 1/(X^2+Y^2+Z^2)^{½} = [e_x,e_y,e_z]^T$.
- Wird Drehung um eine Raumachse benötigt, die nicht durch den Koordinaten-Ursprung führt (vgl. Flugsimulator), so muß sie zuvor an den Ursprung verschoben werden und nach der Rotation an den ursprünglichen Ort zurücktransformiert werden:
  $\underline{R}(\theta) = \underline{T}(t_x,t_y,t_z) \cdot [\underline{R}_x(\beta) \cdot \underline{R}_z(\alpha)]^T \cdot \underline{R}_z(\theta) \cdot \underline{R}_x(\beta) \cdot \underline{R}_z(\alpha) \cdot \underline{T}(-t_x,-t_y,-t_z)$
- Überall bisher: Letzte Zeile wie jene einer Einheitsmatrix – ein Kennzeichen affiner Transformationen.

3D-Punkt-Transformationen

- Affine Transformationen (ATn) sind Punkt-Transformationen, die Linearkombinationen der kartesischen Koordinaten von Punkten bilden; sie sind die am häufigsten angewandten Transformationen in der CG.
- Translation, Rotation, Skalierung und Scherung sind ATn.
- ATn erhalten affine (und konvexe) Punkt-Kombinationen.
- ATn erhalten gerade Linien und Ebenen.
- ATn erhalten Parallelität von Linien und Ebenen;

  Translation und Rotation erhalten darüber hinaus auch die Längen von Linien und die Winkel zwischen ihnen.
- ATn erhalten Teilungsverhältnisse von Strecken. (Spezialfall: mittiger Schnittpunkt von Quadrat-/ Würfel-Diagonalen bildet sich ab auf mittigen Schnittpunkt der Parallelogramm-/Parallelepiped-Diagonalen)

3D-Punkt-Transformationen

- 2D-ATn multiplizieren den Flächeninhalt transformierter 2D-Objekte mit der Determinanten ihrer Matrix; 3D-ATn verändern entsprechend das Objekt-Volumen mit |det M|
- Multiplikation einer bel. Anzahl der Matrizen mehrerer ATn ergibt die Matrix einer wirkungsgleichen AT.
- Die Transformation, die eine AT rückgängig macht, ist ebenfalls eine AT; ihre Matrix-Darstellung ist die inverse Matrix der ursprünglichen AT.
- Jede AT läßt sich aus einer (bel.) vorgegebenen Folge v. Elementar-ATn zusammensetzen –z.B.: (⇦Leserichtung!) M = (Scherung) · (Skalierung) · (Rotation) · (Translation)
- Die Spalten der AT-Matrix enthalten das transformierte CF (≡ transformierte Einheitsmatrix!).
- ATn lassen sich immer in Matrixform darstellen; ihre letzte Zeile hat immer die Form: [0 ... 0 1].