Addition von Dualzahlen

3 Rechenregeln:

0 + 0 = 0

1 + 0 = 1

1 + 1 = 0 Übertrag **1**

Beispiel: 10+13=23

	Dual	Dezimal
	001010	10
+	001101	+ 13
Ü	1	
	010111	23

- **Tip:** Binärdarstellung sicherheitshalber um 2 Stellen erweitern: Führende Nullen erleichtern die Erkennung von Vorzeichen und Übertrag bei algebraischen Summen!

Subtraktion als Addition mit dem Zweierkomplement:

- Bildung des Zweierkomplements des Subtrahenden (=1er-Kompl.+1, bei **gleichlanger** Darstellung von Minuend und Subtrahend, inkl. **Vorzeichenstelle**),
- **Addition** und
- Abschneiden entstandener **Überträge** bei Addition von Zahlen ungleichen Vorzeichens
(≡ Differenzbildung zwischen Zahlen gleichen Vorzeichens).

Beispiel: 13-10=3

```
Aufgabe:        Zweierkomplement:
  001101               001101
 -001010   ⇒     +     110101
                 +          1
                 ------------
          Ü        1 111 1_
                 ------------
                  (1)000011    ⇒   00011₂ = 3₁₀
```

Führende 1 im Ergebnis entbehrlich – entweder als überflüssiger Übertrag, oder (nach der 2er-Kompl.-Bildung) als führende Null.

Subtraktion mit negativem Ergebnis (hier: **10-13=-3**)

```
   001010   (2erK.)      001010
 - 001101      ⇒      +  110010
                      +       1
                 Ü          1
                         111101
```

$111101 = -(000010+1)_2 = -3_{10}$

Addition zweier negativer Zahlen (hier: **-10-13=-23**)

```
  -001010   (2erK.)      110101
              ⇒       +       1
 - 001101             +  110010
                      +       1
                 Ü      11 111
                        1101001
```

$1101001 = -(0010110+1)_2 = -23_{10}$

Multiplikation von Dualzahlen

3 Rechenregeln:

0 · 0 = 0

1 · 0 = 0

1 · 1 = 1

Beispiel: 13 · 3=39

```
   001101 · 11
  _____________
   001101
 +  001101
  _____________
Ü  011
  _____________
   0100111
```

Hinweis: Die Gesetze der Arithmetik gelten unabhängig von der Zahlendarstellung – so z.B. das Kommutativgesetz der Addition und der Multiplikation:

1+0 = 0+1 = 1 und **1·0 = 0·1 = 0**

Division von Dualzahlen

Rechenregeln:

0 : 1 = 0

1 : 1 = 1

Hinweis:

x : 0 ist nicht definiert!

(**x** beliebig)

Beispiel: 7:3 = 2 R 1

```
   00111 : 11   = 10 R 1
  ----------------
   0011
 - 0011
 + 1100
 +    1
  ----------------
Ü 1111
  ----------------
  100001
```

Division von Dualzahlen – weitere Beispiele:

```
21:5 = 4 R 1

      0 0 1 0 1 0 1 : 1 0 1 = 1 0 0 R 1
  ----------------------------------------
      0 0 1 0 1
 -    0 0 1 0 1
 +    1 1 0 1 0
 +            1
  ---------------
Ü   1 1 1 1 1
  ---------------
    1 0 0 0 0 0 0 1
```

```
26:3 = 8 R 2

      0 0 1 1 0 1 0 : 1 1 = 1 0 0 0 R 1 0
  ----------------------------------------
      0 0 1 1
 -    0 0 1 1
 +    1 1 0 0
 +          1
  ---------------
Ü   1 1 1 1
  ---------------
    1 0 0 0 0 0 1 0
```

- Bedarf nach Darstellung gebrochener Zahlen mit Vor- u. Nachkommateil (phys. Größen, Währungen etc.)
  – im Dualsystem: $\ldots 2^3\ 2^2\ 2^1\ 2^0\ ,\ 2^{-1}\ 2^{-2}\ 2^{-3}\ \ldots$

  Beispiele:

Gebrochene Dualzahl	Gebrochene Dezimalzahl
0,1	0,5
0,01	0,25
0,001	0,125
111,111	7,875
0,0001 1001 1001 1001	0,1

- Ähnlich dem Dezimalsystem bedeutet eine Verschiebung des Kommas nach rechts (bzw. links) eine Multiplikation (bzw. Division) der Zahl mit 2.

Überführung von Dezimalzahlen in das Dualzahlensystem getrennt für den ganzzahligen und den gebrochenen Teil

- **Ganzzahliger Teil:** Fortlaufende Divisionen durch 2, bis Quotient=0; Reste ergeben Vorkommastellen der Dualzahl v.r.n.l. (⇦ s.o.).
- **Gebrochener Teil:** Fortlaufende Multiplikationen der Nachkommastellen mal 2, bis Nachkommateil =0; Vorkommastellen der Produkte ergeben Nachkommastellen der Dualzahl v.l.n.r. (⇨).

Beispiel: Umwandlung der Zahl $6{,}375_{10} = 110{,}01100_2$

Vorkommastellen:

6 : 2 = 3 R **0**

3 : 2 = 1 R **1**

1 : 2 = 0 R **1**

$\Rightarrow 6_{10} = 110_2$

Nachkommastellen:

0,375 x 2 = **0**,75

0,75 x 2 = **1**,5

0,5 x 2 = **1**,0

$\Rightarrow 0{,}375_{10} = 0{,}011_2$

- <u>Vorsicht:</u>

  Im Vergleich zum Dezimalsystem können unendlich viele Nachkommastellen bei anderen Zahlen auftreten!

  (Angabe gewünschter Nachkomma-Stellen notwendig)

  Beispiel:

  Umwandlung mit 5 binären Nachkomma-Stellen der Zahl $0{,}1_{10} = 0{,}0\ 0011\ 0011\ldots_2 \approx 0{,}0\ 0011_2$ ($= 0{,}093750_{10}$)

  Vorkommastelle: $0 : 2 = 0$ R $\mathbf{0} \Rightarrow 0_{10} = \mathbf{0}_2$

  Nachkommastellen: $0{,}1 \times 2 = \mathbf{0}{,}2$

  $0{,}2 \times 2 = \mathbf{0}{,}4$

  $0{,}4 \times 2 = \mathbf{0}{,}8$

  $0{,}8 \times 2 = \mathbf{1}{,}6$

  (! →) $0{,}6 \times 2 = \mathbf{1}{,}2$

  (! →) $0{,}2 \times 2 = \mathbf{0}{,}4 \Rightarrow 0{,}1_{10} \approx 0{,}0\ 0011_2$

Zahlensysteme und ihre Anwendung

Dilemma bei der digital-technischen Realisierung einheitlich langer rechnerinterner Zahlen- / Variablen-Darstellung:

Die direkte Zuordnung von relativ wenigen (n) Bits zu ganzen oder gebrochenen Dualzahlen führt zu Problemen bei der Darstellung sehr kleiner oder sehr großer Zahlen.

Beispiel:

Ein Byte (n=8) erlaubt die Unterscheidung (Codierung) von 2^8 =256 Zustände (Zahlen); Darstellung einer Variablen x ohne Vorzeichen mit 4 Vorkomma- u. 4 Nachkommastellen:

$$0000.0001_2 < x < 1111.1111_2$$

Auflösung des Zahlensystems

$$0{,}0625_{10} < x < 15{,}9375_{10}$$

Heute üblich: 4 Byte (2^{32}= 4.294.967.296 Möglichkeiten); – vgl.:

- Weltbevölkerung (01.01.2012): ca. 7,01 • 10^9 Menschen
- Staatsverschuldung Dtl. (31.03.2012): ca. 2,04 • 10^{12} €
- Privatvermögen d. reichsten 10% Dtl. (2007): ca. 5,82 • 10^{12} €
- Atomare Masseneinheit: ca. 1,66 • 10^{-27} kg

Lösungsansatz durch Erkenntnis aus der Praxis:

In Zählungen / Messungen mit sehr langen (großen oder kleinen) Ergebnissen ist Genauigkeit meist unmöglich u./o. uninteressant

Darstellung von Gleitpunktzahlen **Z**:

$$\mathbf{Z = (-1)^V \cdot M \cdot B^E}\text{, mit:}$$

V: Vorzeichen-Bit (0: positiv, 1: negativ)
B: Basis des zugrunde gelegten Zahlensystems (2, 10 oder 16)
M: Mantisse: $1/B \leq M < 1$ („normalisierte“ Gleitpunktzahl)
E: Exponent

- Von über 20 Formaten meistverbreitet: IEEE-Standard 754 (Institute of Electrical and Electronics Engineers, 1985), 32 Bit: 1 für Vorzeichen +23 für Mantisse (Basis: 2) +8 für Exponenten d.h.: Unterscheidung von 2^{24} = 16.777.216 Zuständen (Zahlen) Größenordnung der größten darstellbaren Zahl: $2^{127} = 1{,}70 \cdot 10^{+38}$ Größenordnung d. kleinsten darstellbaren Zahl: $2^{-126} = 1{,}17 \cdot 10^{-38}$
- Übersetzungs- (dezimal in dual) und Rechenrundungen!

Die Forderung $1/B \leq M < 1$ bedeutet für Dualzahlen, daß die erste Nachkomma-Ziffer der Mantisse immer eine 1 ist ($Z=0{,}1\ldots_2$). Das veranlaßte Computer-Hersteller, die Mantisse zu verdoppeln und neu zu definieren: als die Nachkomma-Stellen der Zahlendarstellung $1,\ldots * 2^E$, mit Konsequenzen für die Programmierung der Operationen und die Kompatibilität zu Computern anderer Hersteller.

So erhält die Dualdarstellung der Dezimalzahl +0,0001577567163622 den Exponenten -13 (zur Basis 2) und die Mantisse 01001010110101101111111; denn:

$01001010110101101111111_2$ lautet nach Wiedereinsetzung der führenden 1:

$\underline{\mathbf{1}}01001010110101101111111_2=10840959_{10}$ (Mantisse als ganze Zahl)

Die Zahl $1{,}01001010110101101111111_2 * 2^{-13}$ errechnet sich daraus zu:

$(10840959 / 2^{23}) * 2^{-13} = 10840959 / 2^{36} = 1{,}577567163622006773\ldots e\text{-}4$ (s.o.)

Entsprechend erhält die Zahl -29343216566272 das negative Vorzeichen (1), die 2er-Potenz +44 und die Mantisse 10101011000000000000000; d.h., mit der führenden 1:

$\underline{\mathbf{1}}10101011000000000000000_2 = 13991936_{10}$, woraus folgt:

$\mathbf{-1,}10101011000000000000000_2 * 2^{44} = (-13991936 / 2^{23}) * 2^{44}$

$=-29343216566272$

Für die Zahl 1234711 ergibt sich ganz analog dazu ein Exponent von 20 und eine Mantisse von $00101101011100010111000_2$; mit $\underline{\mathbf{1}}00101101011100010111000_2 = 9877688_{10}$ folgt:

$\mathbf{1},00101101011100010111000_2 * 2^{20}=(9877688 / 2^{23}) * 2^{20} = 9877688 / 8$

$= 12347117$

- Die hier verwendete „**Normalform**“ der **Mantisse** fordert:

  $1/B \leq M < 1$, somit z.B.: $0{,}1_{10} \leq M_{10} \leq 0{,}999\ldots_{10}$; d.h.:

  Die Mantisse ist jenes Produkt der darzustellenden Zahl mit (pos./neg.) Potenzen der Basis, das eine Null vor dem Komma ergibt, während hinter dem Komma nur Ziffern $\neq 0$ vorkommen; d.h. für Dualzahlen:

  Die erste Mantisse-Ziffer normalisierter Gleitpunktzahlen ist immer =1 und somit redundant! Sie wird weggelassen.

- Der **Exponent** belegt 8 Bit, deren Kombinationen nicht sämtlich genutzt werden: die betragshöchsten positiven u. negativen Werte sind zur Darstellung „unzulässiger“ Zahlen reserviert $\Rightarrow$ zulässig: $-126 \leq E \leq 127$

  Speicherung in der sog. **Exzeß**- (auch: Bias-) Darstellung:

  Bei n Bit wird E um $2^{(n-1)}-2$ erhöht, hier: $2^{(8-1)} - 2 = 126$; $\Rightarrow$ damit werden alle zulässigen Exponenten-Werte ≥ 0.

Beispiel:

Umwandlung von $-4{,}25_{10}$ in eine binäre Gleitpunktzahl

1. Umwandlung des Betrags in eine Dualzahl:

Vorkommastellen:

$4 : 2 = 2 \text{ R } \mathbf{0}$

$2 : 2 = 1 \text{ R } \mathbf{0}$

$1 : 2 = 0 \text{ R } \mathbf{1}$

$\Rightarrow 4_{10} = 100_2$

Nachkommastellen:

$0{,}25 \times 2 = \mathbf{0}{,}5$

$0{,}5 \times 2 = \mathbf{1}{,}0$

$\Rightarrow 0{,}25_{10} = 0{,}01_2$

$\Rightarrow 4{,}25_{10} = 100{,}01_2$

2. Normierung:

$100{,}01_2 = 0{,}10001_2 \cdot 2^3$

Mantisse: $\cancel{1}0001_2 \Rightarrow$ Speicherung: $00010 \ldots 0_2$ (23stellig)

Vorzeichen V=1, denn: $(-1)^1=-1$

Beispiel (Forts.)

3. Exponent E = 3 + 126 = 129 in Exzeß-Darstellung, binär:

fortlaufende Divisionen:

129 : 2 = 64 R 1

64 : 2 = 32 R 0

32 : 2 = 16 R 0

16 : 2 = 8 R 0

8 : 2 = 4 R 0

4 : 2 = 2 R 0

2 : 2 = 1 R 0

1 : 2 = 0 R 1 $\Rightarrow 129_{10} = 1000\ 0001_2$

somit: $\mathbf{-4{,}25_{10} = 1\ \ 10000001\ \ 00010000000000000000000_2}$

BitTest.exe

Weitere, ebenfalls verwendete Interpretation derselben Norm:

Anstelle von: $\mathbf{Z = (-1)^V \cdot M \cdot 2^E}$, mit $\frac{1}{2} \leq M < 1$; $E = [\, \mathrm{ld}\, Z \,]+1$

Darstellung als: $\mathbf{Z = (-1)^V \cdot M' \cdot 2^{E'}}$, mit $1 \leq M' < 2$; $E' = [\, \mathrm{ld}\, Z \,]$

„Gauß-Klammer“: Ganzzahlfunktion *

d.h.: $M' = M \cdot 2 \Rightarrow E' = E - 1$

Konsequenz für die Binärdarstellung nach IEEE 754:

Speicherung von M' in Normalform ohne die '1' vor dem Komma (wie von M entsprechend ohne die erste '1' nach dem Komma):

$M'_{Norm} \equiv M_{Norm}$: sie sind identisch!

Exzeß-Darstellung von E' wird um 127 erhöht; denn:

$E'_{Exzeß} = E' + 127 = E - 1 + 127 = E + 126$

Beispiel:

$2_{10} = 10_2 = 0{,}\cancel{1}0_2 \cdot 2^2{}_{10} \Rightarrow V=\mathbf{0}$; $M_{Norm} = \mathbf{0}$; $E_{Exzeß} = E + 126 = \mathbf{128}_{10}$

$2_{10} = 10_2 = \cancel{1}{,}0_2 \cdot 2^1{}_{10} \Rightarrow V=\mathbf{0}$; $M'_{Norm} = \mathbf{0}$; $E'_{Exzeß} = E' + 127 = \mathbf{128}_{10}$

---

* Die Ganzzahlfunktion ordnet einer reellen Zahl x eine ganze Zahl [x] zu: $x-1 < [x] \leq x$ $(x \in \mathbb{R}, [x] \in \mathbb{Z})$