Skalarprodukt, Orthogonalität (2D)

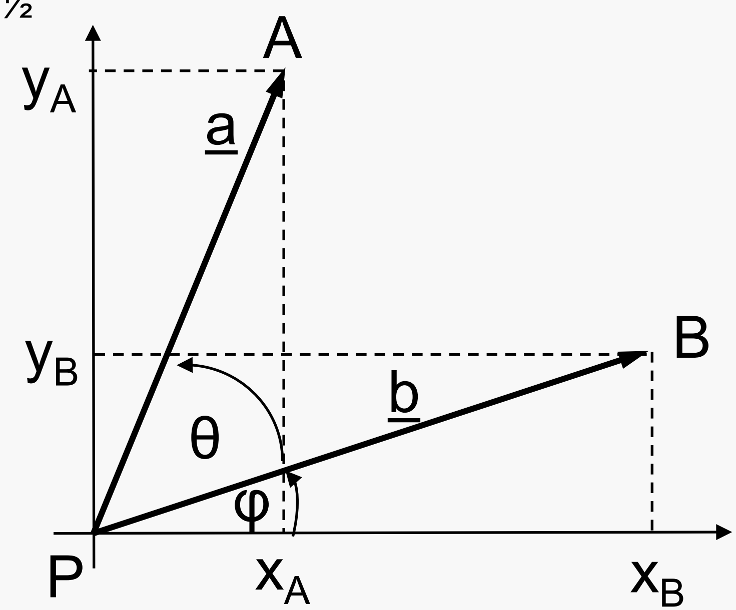
Skalarprodukt zweier Vektoren $\underline{a} \cdot \underline{b}$:

$x_A = |\underline{a}| \cdot \cos(\varphi+\theta)$, mit $|\underline{a}| = (x_A^2 + y_A^2)^{½}$

$y_A = |\underline{a}| \cdot \sin(\varphi+\theta)$

$x_B = |\underline{b}| \cdot \cos\varphi$, mit $|\underline{b}| = (x_B^2 + y_B^2)^{½}$

$y_B = |\underline{b}| \cdot \sin\varphi$



$$\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = x_A \cdot x_B + y_A \cdot y_B$$

$$= |\underline{a}| \cdot \cos(\varphi+\theta) \cdot |\underline{b}| \cdot \cos\varphi$$

$$+ |\underline{a}| \cdot \sin(\varphi+\theta) \cdot |\underline{b}| \cdot \sin\varphi$$

$$= |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos\theta$$

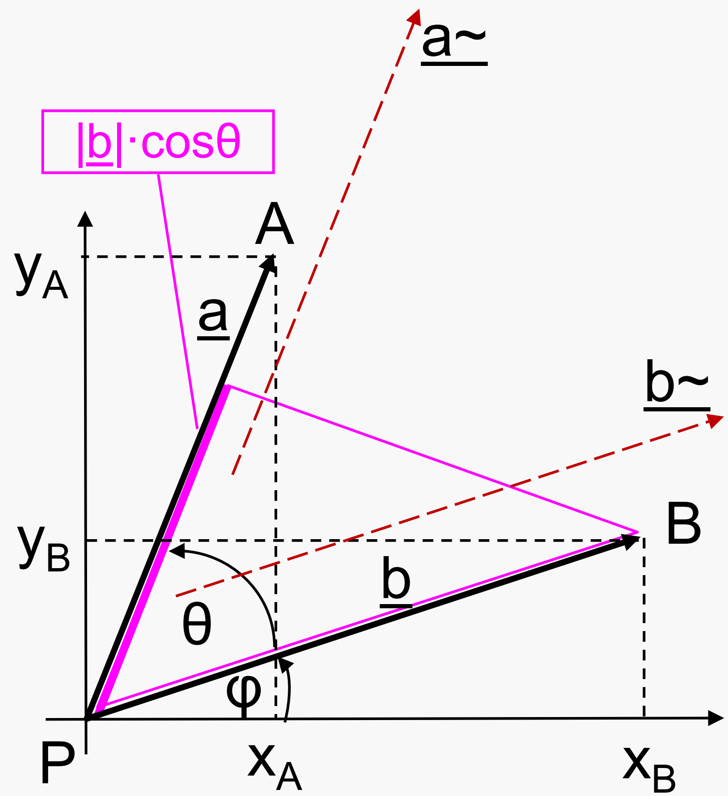
⇨ $$\boxed{\cos\theta = \frac{[x_A\ y_A] \bullet [x_B\ y_B]^T}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|}}$$

$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\,\cos\beta \mp \sin\alpha\,\sin\beta$
$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\,\cos\beta \pm \cos\alpha\,\sin\beta$

Skalarprodukt, Orthogonalität

Beobachtungen zum Skalarprodukt:

- Nur die Lage beider Vektoren relativ zueinander (nur θ) geht in $\underline{a}\cdot\underline{b}$ ein.
- Mit $\underline{a}\cdot\underline{b}$ läßt sich der Winkel θ zwischen $\underline{a}$ und $\underline{b}$ berechnen.
- Ist der eine Vektor ein Einheitsvektor, $|\underline{a}|=1$, so ist das Skalarprodukt gleich der Länge d. orthogonalen Projektion des andern Vektors $\underline{b}$ auf d. $\underline{a}$-Achse.
- Das Skalarprodukt bleibt gleich für beliebige Parallelverschiebung von $\underline{a}$ und $\underline{b}$ jeweils zu $\underline{a}\sim$ und $\underline{b}\sim$.



⇨ $$\cos\theta = \frac{[x_A\ y_A]\cdot[x_B\ y_B]^T}{|\underline{a}|\cdot|\underline{b}|}$$

$\theta < 90° \Leftrightarrow \underline{a}\cdot\underline{b} > 0$

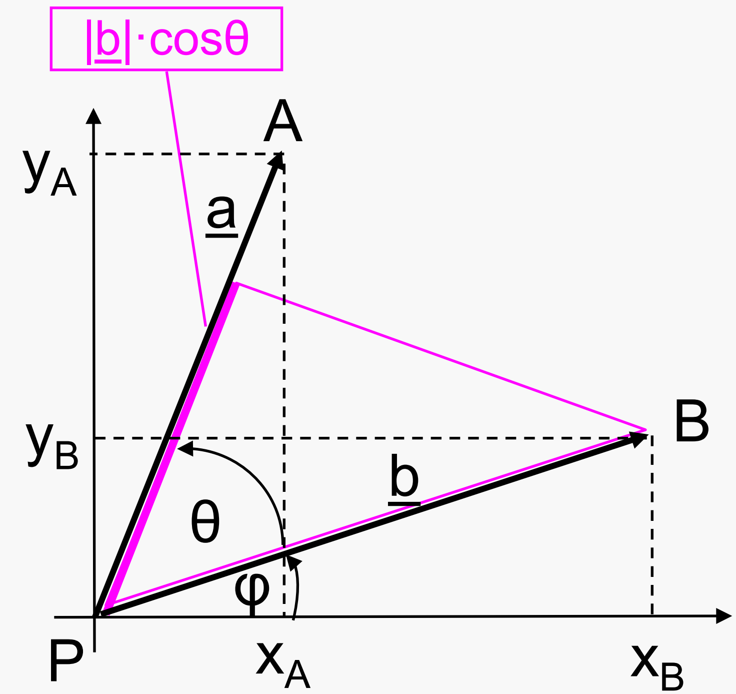
$\theta = 90° \Leftrightarrow \underline{a}\cdot\underline{b} = 0$

$\theta > 90° \Leftrightarrow \underline{a}\cdot\underline{b} < 0$

Skalarprodukt, Orthogonalität

- Stehen zwei Vektoren $\underline{a}$, $\underline{b}$ senkrecht (orthogonal) zueinander, so ist ihr Skalarprodukt gleich Null ($\cos\theta = 0$).
- Orthogonalität von $\underline{a}$ und $\underline{b}$ in der x-y-Ebene ist gleichbedeutend mit:

  $x_A \cdot x_B = - y_A \cdot y_B$ (A)
- Orthogonalität und Rotation um 90° sind äquivalente Betrachtungen des gleichen Zusammenhangs.
- Die Drehrichtung in Gl. (A) ergibt sich aus der Betrachtung der Vorzeichen in den vier Quadranten (s.u.).



$$\Rightarrow \quad \boxed{\cos\theta = \frac{[x_A\ y_A] \cdot [x_B\ y_B]^T}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|}}$$

$\theta < 90° \Leftrightarrow \underline{a} \cdot \underline{b} > 0$
$\theta = 90° \Leftrightarrow \underline{a} \cdot \underline{b} = 0$
$\theta > 90° \Leftrightarrow \underline{a} \cdot \underline{b} < 0$

Skalarprodukt, Orthogonalität

Angefangen bei +/+ als x-/y-Vorzeichen des I. Quadranten, erhält man das Vorzeichen des jeweils nächsten (d.h.: gegen den Uhrzeigersinn gelegenen) Quadranten, indem man

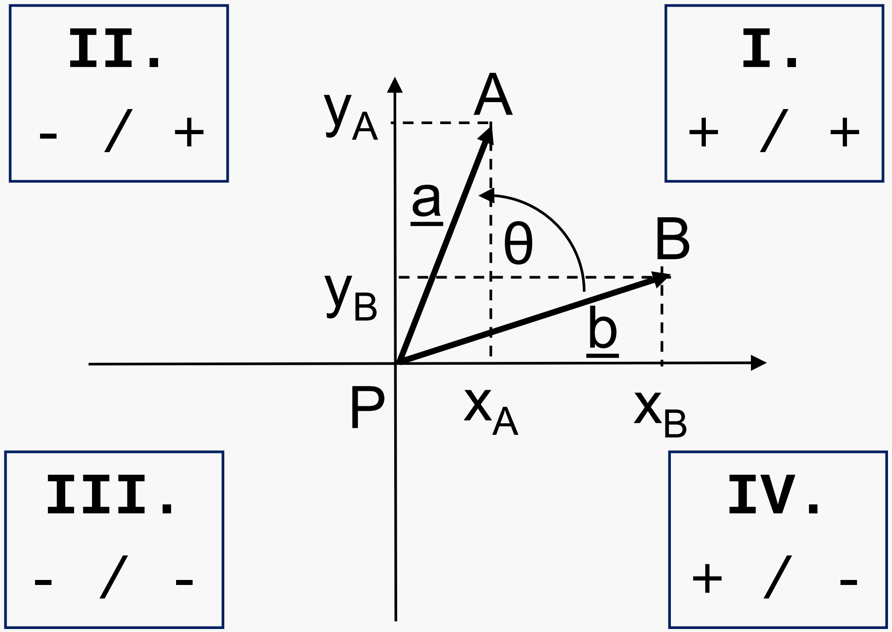
- als x-Vorzeichen das negierte y-Vorzeichen des letzten
- als y-Vorzeichen das x-Vorzeichen des letzten nimmt.

D.h.: Gegenüber dem Vektor
$\underline{v} = [\ x\ ,\ y\ ]$

ist der (betragsgleiche) Vektor
$\underline{v}^{\perp} = [\ -y\ ,\ x\ ]$

um +90° gedreht (orthogonaler, engl. *perp vector*).

Dies gilt unabhängig von den Vorzeichen von x und y.



Skalarprodukt, Orthogonalität

Rechenregeln für das Skalarprodukt:

- Das Skalarprodukt ist kommutativ:*

  $\underline{a} \bullet \underline{b} = \underline{b} \bullet \underline{a}$

- Das Skalarprodukt ist nicht assoziativ:*

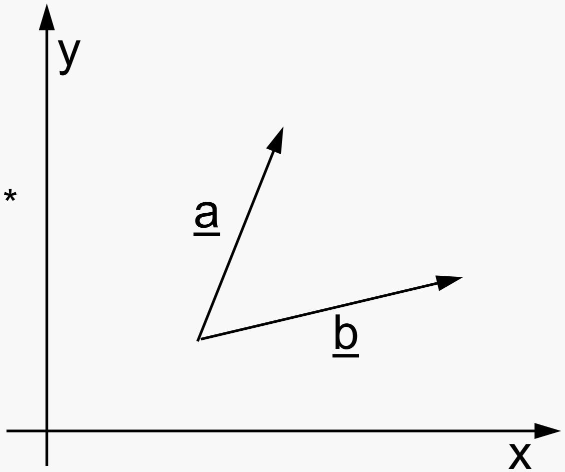
  $\underline{a} \bullet (\underline{b} \bullet \underline{c}) \neq (\underline{a} \bullet \underline{b}) \bullet \underline{c}$

- Betrag (Länge) $|\underline{a}|$ eines Vektors $\underline{a}$:

  $\underline{a} \bullet \underline{a} = |\underline{a}|^2 \Rightarrow |\underline{a}| = (\underline{a} \bullet \underline{a})^{½}$

- Einheitsvektor $\underline{e}_a$ in Richtung von $\underline{a}$:

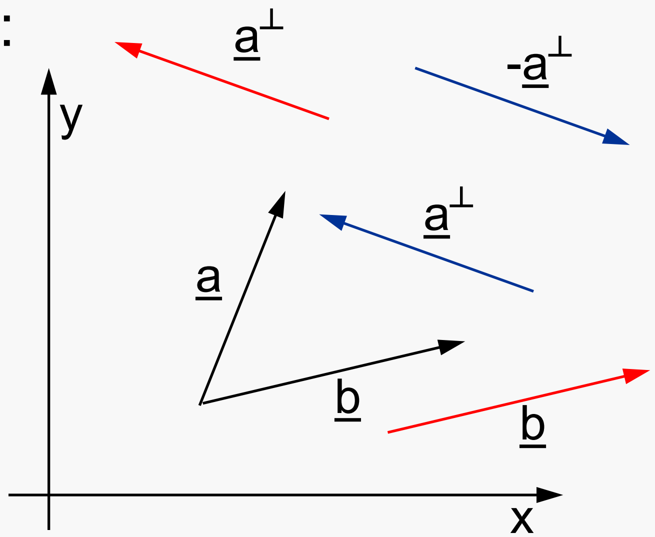
  $\underline{e}_a = \underline{a} \,/\, |\underline{a}| = |\underline{a}| \,/\, (\underline{a} \bullet \underline{a})^{½}$



* Im Gegensatz zum Matrizenprodukt

Skalarprodukt, Orthogonalität

Eigenschaften des orthogonalen Vektors:



- Orthogonalität:

  $\underline{a}^{\perp} \cdot \underline{a} = 0$

- Negation durch doppelte Drehung:

  $\underline{a}^{\perp\perp} = -\underline{a}$

- Betrags-/ Längengleichheit:

  $|\underline{a}^{\perp}| = |\underline{a}|$

- Linearität:

  $(\underline{a} + \underline{b})^{\perp} = \underline{a}^{\perp} + \underline{b}^{\perp}$

- Antisymmetrie d. Skalarprodukts (engl. *perp dot product*):

  $\underline{a}^{\perp} \cdot \underline{b} = -\underline{a} \cdot \underline{b}^{\perp}$

2D-Anwendungen

- Abstand zwischen den Punkten P, A:

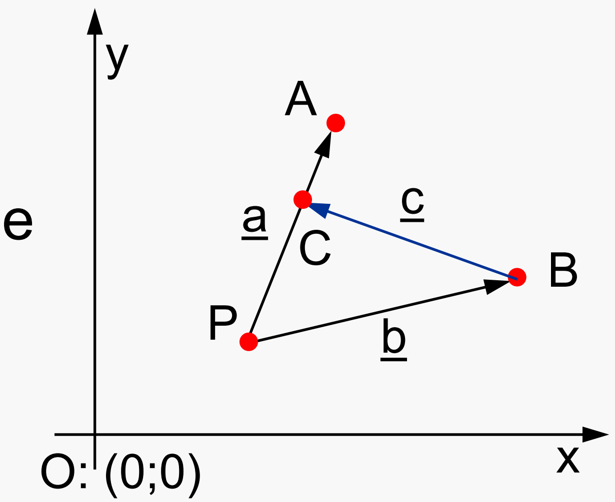
  $|\underline{PA}| = [(x_A - x_P)^2 + (y_A - y_P)^2]^{½}$

- Fußpunkt C des Lotes von B auf die Gerade durch P und A:

  $\underline{PC} = (\underline{b} \bullet \underline{e}_a) \bullet \underline{e}_a$

  $= (\underline{b} \bullet \underline{a}) \bullet \underline{a} \,/\, (\underline{a} \bullet \underline{a})$

  $= [\, (\underline{b} \bullet \underline{a}) \,/\, |\underline{a}|^2 \,] \bullet \underline{a}$



- Lot $\underline{c}$ vom Punkt B auf die Gerade durch P und A:

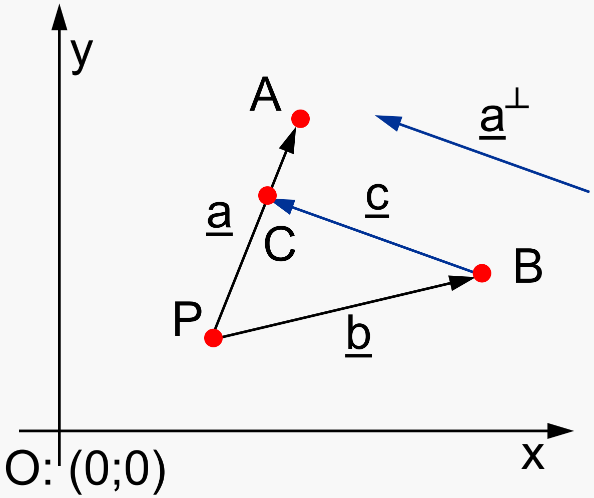
  Aus $\underline{PC} = \underline{b} + \underline{c}$ folgt:

  $\underline{c} = \underline{PC} - \underline{b}$

  $= [\, (\underline{b} \bullet \underline{a}) \,/\, |\underline{a}|^2 \,] \bullet \underline{a} - \underline{b}$

2D-Anwendungen

Leichtere Handhabung bei Verwendung von $\underline{a}^{\perp}$:



- Lot $\underline{c}$ als Projektion von $(-\underline{b})$ auf $\underline{a}^{\perp}$:

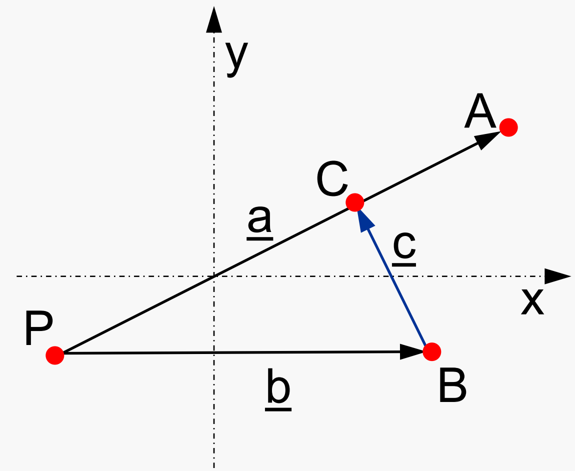
  $$\underline{c} = (-\underline{b} \bullet \underline{e}_a^{\perp}) \bullet \underline{e}_a^{\perp}$$
  $$= [\, (-\underline{b} \bullet \underline{a}^{\perp}) \,/\, |\underline{a}|^2 \,] \bullet \underline{a}^{\perp}$$

- Ermittlung der Koordinaten von B aus dem Fußpunkt C des Lotes von B auf $\underline{PA}$ und der Lotlänge $|\underline{c}|$:

  $$B = C - |\underline{c}| \bullet \underline{e}_a^{\perp}$$
  $$= C - (|\underline{c}| \,/\, |\underline{a}|) \bullet \underline{a}^{\perp}$$

2D-Anwendungen

1. Beispiel



- Gegeben: P: (-2; -1), A: (4; 2), B: (3; -1)
- Gesucht: Lot-Fußpunkt C, Lot $\underline{c}$
- Lösung:

  $\underline{a} = [4; 2]^T - [-2; -1]^T = [6; 3]^T$

  $|\underline{a}|^2 = [6; 3] \bullet [6; 3]^T = 45$

  $\underline{b} = [3; -1]^T - [-2; -1]^T = [5; 0]^T$

  $\underline{b} \bullet \underline{a} = [5; 0] \bullet [6; 3]^T = 30$

Lage des Lot-Fußpunktes C auf der Strecke $\underline{PA}$:

$\underline{PC} = [\, (\underline{b} \bullet \underline{a}\,) \,/\, |\underline{a}|^2 \,] \bullet \underline{a} = [\, 30 / 45 \,] \bullet [6; 3]^T = [4; 2]^T$

Koordinaten des Lot-Fußpunktes C:

$C = P + \underline{PC} = [-2; -1]^T + [4; 2]^T = [2; 1]^T$

Lot $\underline{c}$ (Strecke $\underline{BC}$) : $\underline{c} = \underline{PC} - \underline{b} = [4; 2]^T - [5; 0]^T = [-1; 2]^T$

2D-Anwendungen

<u>2. Beispiel</u> (Verwendung von $a^{\perp}$)

- Gegeben: P: (-2; -1), A: (4; 2), B: (3; -1)
- Gesucht: Lot-Fußpunkt C, Lot $\underline{c}$
- Lösung:

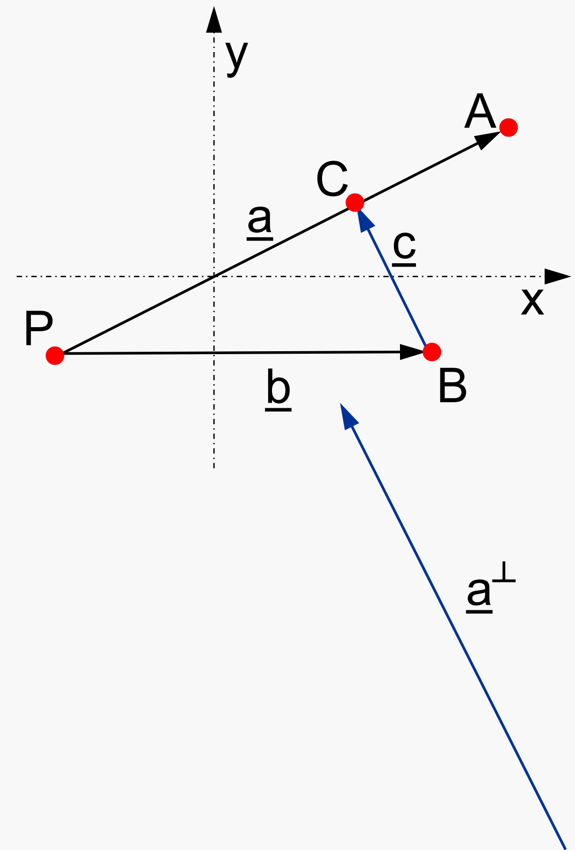
$$\underline{a} = [4; 2]^T - [-2; -1]^T = [6; 3]^T$$

$$\underline{a}^{\perp} = [-3; 6]^T$$

$$|\underline{a}^{\perp}|^2 = |\underline{a}|^2 = [6; 3] \bullet [6; 3]^T = 45$$

$$\underline{b} = [3; -1]^T - [-2; -1]^T = [5; 0]^T$$

$$-\underline{b} \bullet \underline{a}^{\perp} = [-5; 0] \bullet [-3; 6]^T = 15$$



Lot $\underline{c}$ (Strecke $\underline{BC}$):

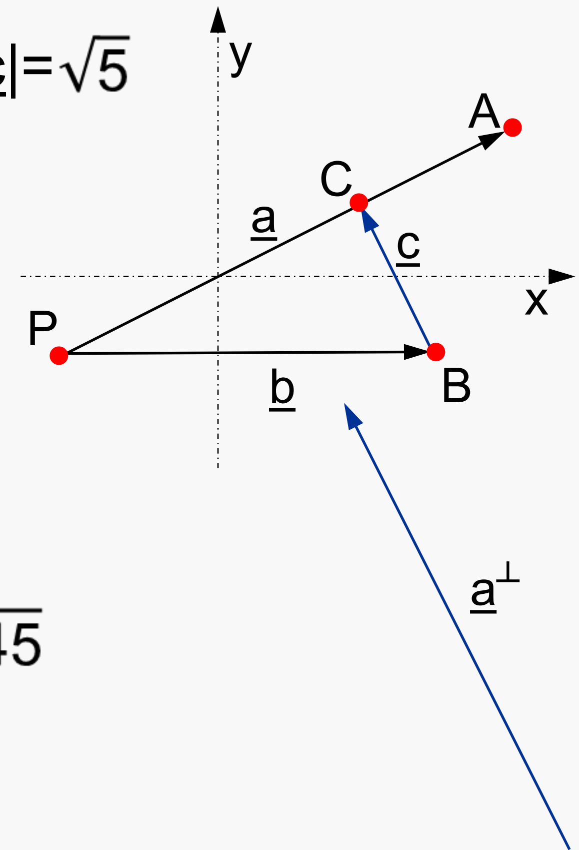
$$\underline{c} = [\, (-\underline{b} \bullet \underline{a}^{\perp}) \,/\, |\underline{a}|^2 \,] \bullet \underline{a}^{\perp}$$

$$= (\, 15 / 45 \,) \bullet [-3; 6]^T = [-1; 2]^T \text{ (gleiches Ergebnis, s.o.)}$$

Lotlänge: $|\underline{c}| = (1^2 + 2^2)^{½} = \sqrt{5}$

3. Beispiel (Verwendung von $\underline{a}^{\perp}$)

- Gegeben: P: (-2; -1), A: (4; 2), C: (2; 1), $|\underline{c}|=\sqrt{5}$
- Gesucht: Punkt B in Entfernung $|\underline{c}|$
  über dem Lot-Fußpunkt C



- Lösung:

  $\underline{a} = [4; 2]^T – [-2; -1]^T = [6; 3]^T$

  $\underline{a}^{\perp} = [-3; 6]^T$

  $|\underline{a}^{\perp}|^2 = |\underline{a}|^2 = [6; 3] \cdot [6; 3]^T = 45 \Rightarrow |\underline{a}| = \sqrt{45}$

  $B = C – (|\underline{c}| / |\underline{a}|) \cdot \underline{a}^{\perp}$

  $= [2; 1]^T – (\sqrt{5} / \sqrt{45}) \cdot [-3; 6]^T$

  $= [2; 1]^T – (1/ 3) \cdot [-3; 6]^T = [2; 1]^T – [-1; 2]^T$

  $= [3; -1]^T$