# Punkte, Vektoren



In den Naturwissenschaften häufig: Rechnen mit 3D-Vektoren und -Punkten –z.B.: Stärke, Richtung d. Gravitation g(x,y,z) an einem bestimmten Punkt im Weltraum p(x,y,z)

Darstellung von 3D-Vektoren und -Punkten meist identisch: kartesische Koordinaten als Zahlentripel (x, y, z) – aber:

- Vektoren haben Betrag und Richtung, aber keine Position.
- Punkte haben Position, aber weder Betrag noch Richtung.

Typische Umgehung der Unwegsamkeit: Darstellung eines Punktes über seinen Ortsvektor, d.h. über seinen *Versatz* gegenüber d.Koordinaten-Ursprung (*V*.-Betrag, *V*.-Richtung!)

Verbleibendes Problem: Darstellung bei Verwendung mehrerer Koordinatensysteme.

⇨ Erweiterung des Begriffs des (3D-)Koordinatensystems:

# Punkte, Vektoren



Ein *Coordinate Frame* (*CF*, Koord.rahmen,-netz) besteht aus

- 3 senkrecht zueinander stehenden Einheitsvektoren $\underline{\mathbf{i}}$,$\underline{\mathbf{j}}$,$\underline{\mathbf{k}}$
- einem besonderen Punkt φ, dem Ursprung (engl. *origin*).

($\underline{\mathbf{i}}$,$\underline{\mathbf{j}}$,$\underline{\mathbf{k}}$,φ können nur über andere CF spezifiziert werden!)

„Homogene“ Vektor- u. Punkt-Darstellung (4 Komponenten):

Vektor $\underline{v} = v_1\, \underline{\mathbf{i}} + v_2\, \underline{\mathbf{j}} + v_3\, \underline{\mathbf{k}} \quad = [\, v_1, v_2, v_3, 0\, ]^T$

Punkt $\underline{p} = p_1\, \underline{\mathbf{i}} + p_2\, \underline{\mathbf{j}} + p_3\, \underline{\mathbf{k}} + \varphi \quad = [\, p_1, p_2, p_3, 1\, ]^T$

$^T$ : Transposition

Übereinstimmend mit bisherigen Feststellungen (vgl. Ortsv.):

- Die Differenz zweier Punkte ist ein Vektor.
- Die Summe eines Punktes und eines Vektors ist ein Punkt.
- Die Summe zweier Vektoren ist ein Vektor.
- Skalierung eines Vektors ist sinnvoll.
- Addition von Punkten ist nicht sinnvoll / nicht zulässig.
- Jede Linearkombination von Vektoren ergibt einen Vektor.

# Punkte, Vektoren



Zur Erinnerung:

- **Linearkombination** von Vektoren = Summe skalierter Vektoren:

  $\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \ldots \ (\alpha_i \in \mathbf{R})$

- **Affine Kombination** von Vektoren = Summe skalierter Vektoren mit Summe der Skalierungsfaktoren =1:

  $\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \ldots \ (\alpha_i \in \mathbf{R},\ \Sigma\alpha_i = 1)$

- **Konvexe Kombination** von Vektoren = Summe skalierter Vektoren mit Summe der Skalierungsfaktoren =1 und mit nichtnegativen Skalierungsfaktoren :

  $\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \ldots \ (\alpha_i \in \mathbf{R},\ \Sigma\alpha_i = 1,\ \alpha_i \geq 0)$

Affine u. konvexe Kombinationen von Punkten sind zulässig!

Im folgenden: 2D-Vektoren in kartesischen Koordinaten.

# Punkte, Vektoren

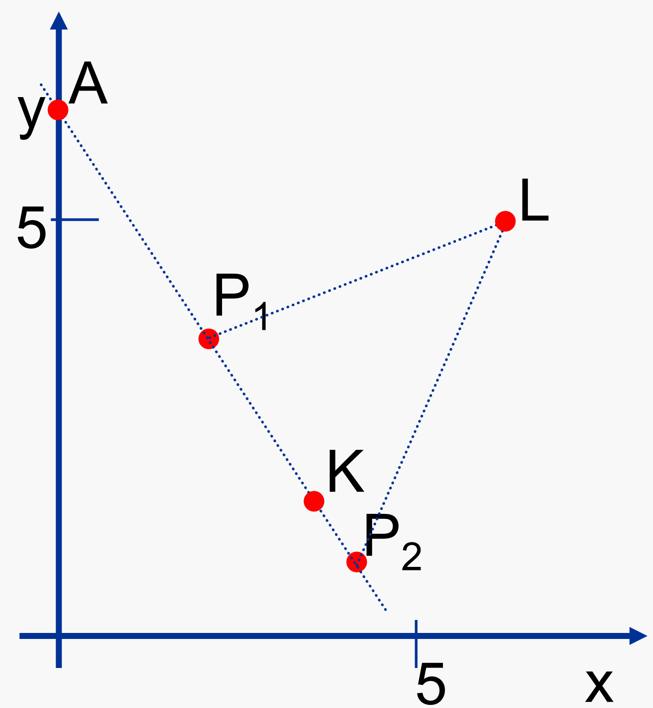


**Beispiel:** Konvexe (K), affine (A) und lineare (L) Punkt-Kombinationen von $P_1=[2, 4]^T$ und $P_2=[4, 1]^T$ :

K $= 0.25\ P_1 + 0.75\ P_2$
$= [0.5, 1]^T + [3, 0.75]^T$
$= [3.5, 1.75]^T$

A $= 2\ P_1 – 1\ P_2$
$= [4, 8]^T – [4, 1]^T$
$= [0, 7]^T$

L $= 1\ P_1 + 1\ P_2$
$= [2, 4]^T + [4, 1]^T$
$= [6, 5]^T$



# Punkte, Vektoren

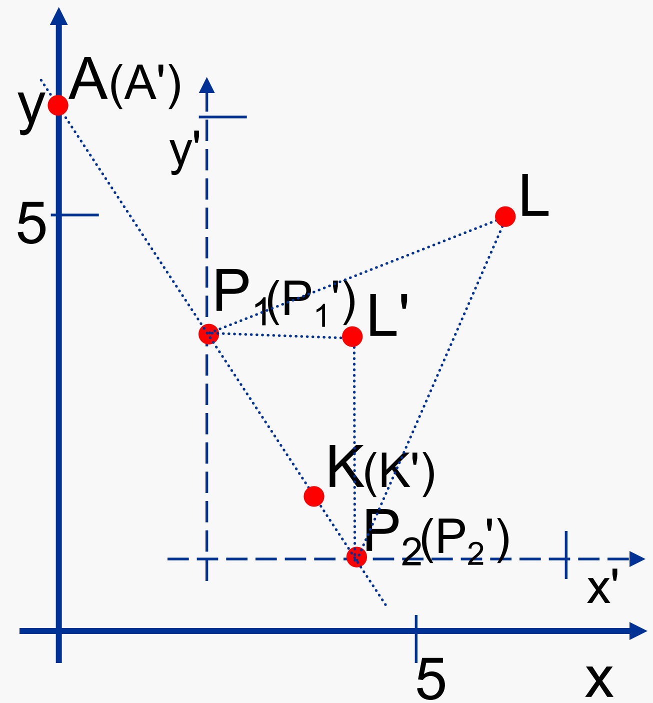


**Beispiel:** Konvexe (K), affine (A) und lineare (L) Punkt-Kombinationen von $P_1=[2, 4]^T$ und $P_2=[4, 1]^T$ bei Wechsel des Koordinatensystems zu $P_1'=[0, 3]^T$ und $P_2'=[2, 0]^T$:

$$K' = 0.25\, P_1' + 0.75\, P_2' = [0, 0.75]^T + [1.5, 0]^T = [1.5, 0.75]^T$$

$$A' = 2\, P_1' - 1\, P_2' = [0, 6]^T - [2, 0]^T = [-2, 6]^T$$

$$L' = 1\, P_1' + 1\, P_2' = [0, 3]^T + [2, 0]^T = [2, 3]^T$$




⇨ Nur affine (u. somit auch konvexe) Punkt-Kombinationen sind unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems!