Skalarprodukt, Orthogonalität (2D)

Prof. Dr. Aris Christidis • WS 2014/15

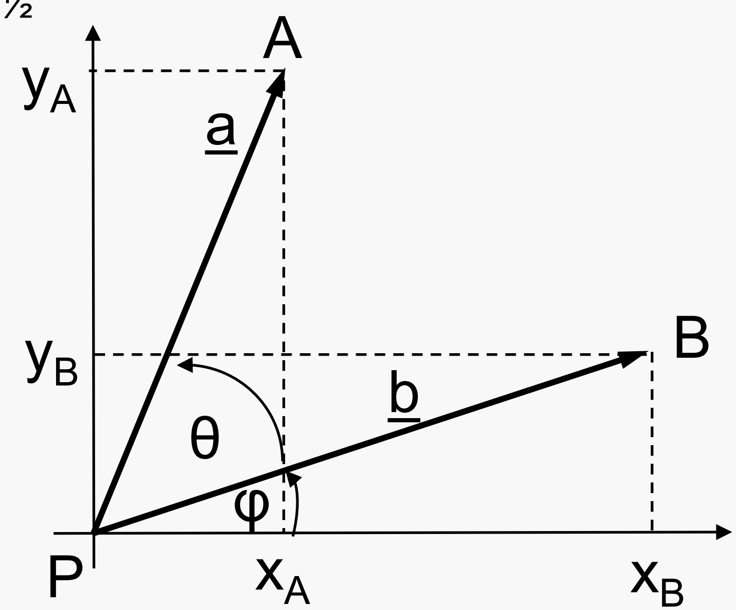
Skalarprodukt zweier Vektoren $\underline{a} \cdot \underline{b}$:

$x_A = |\underline{a}| \cdot \cos(\varphi+\theta)$, mit $|\underline{a}| = (x_A^2 + y_A^2)^{1/2}$

$y_A = |\underline{a}| \cdot \sin(\varphi+\theta)$

$x_B = |\underline{b}| \cdot \cos\varphi$, mit $|\underline{b}| = (x_B^2 + y_B^2)^{1/2}$

$y_B = |\underline{b}| \cdot \sin\varphi$



$$\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = x_A \cdot x_B + y_A \cdot y_B$$

$$= |\underline{a}| \cdot \cos(\varphi+\theta) \cdot |\underline{b}| \cdot \cos\varphi$$

$$+ |\underline{a}| \cdot \sin(\varphi+\theta) \cdot |\underline{b}| \cdot \sin\varphi$$

$$= |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos\theta$$

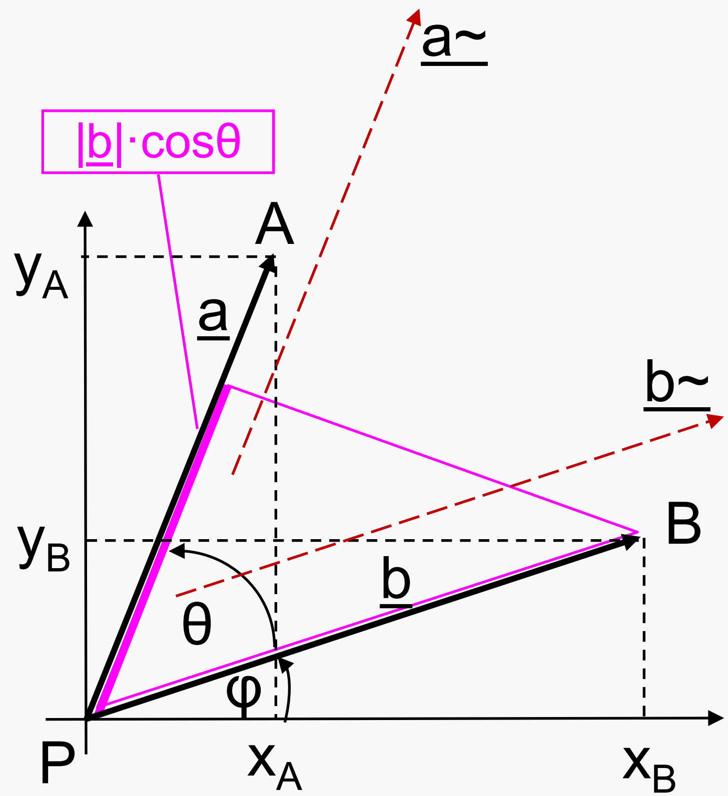
⇨ $$\boxed{\cos\theta = \frac{[x_A\ y_A] \bullet [x_B\ y_B]^T}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|}}$$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$

Skalarprodukt, Orthogonalität (2D)

Beobachtungen zum Skalarprodukt:

- Nur die Lage beider Vektoren relativ zueinander (nur θ) geht in $\underline{a} \cdot \underline{b}$ ein.
- Mit $\underline{a} \bullet \underline{b}$ läßt sich der Winkel θ zwischen $\underline{a}$ und $\underline{b}$ berechnen.
- Ist der eine Vektor ein Einheitsvektor, $|\underline{a}|=1$, so ist das Skalarprodukt gleich der Länge d. orthogonalen Projektion des andern Vektors $\underline{b}$ auf d. $\underline{a}$-Achse.
- Das Skalarprodukt bleibt gleich für beliebige Parallelverschiebung von $\underline{a}$ und $\underline{b}$ jeweils zu $\underline{a\sim}$ und $\underline{b\sim}$.



⇨ $$\cos\theta = \frac{[x_A\ y_A] \bullet [x_B\ y_B]^T}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|}$$

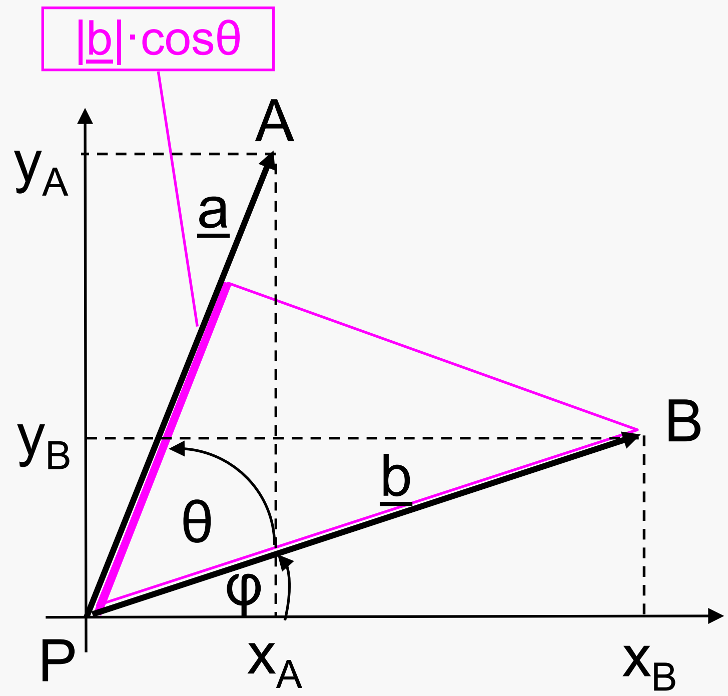
$$\theta < 90° \Leftrightarrow \underline{a} \cdot \underline{b} > 0$$
$$\theta = 90° \Leftrightarrow \underline{a} \cdot \underline{b} = 0$$
$$\theta > 90° \Leftrightarrow \underline{a} \cdot \underline{b} < 0$$

Skalarprodukt, Orthogonalität (2D)

- Stehen zwei Vektoren a, b senkrecht (orthogonal) zueinander, so ist ihr Skalarprodukt gleich Null ($\cos\theta = 0$).
- Orthogonalität von a und b in der x-y-Ebene ist gleichbedeutend mit:

$$x_A \cdot x_B = -\, y_A \cdot y_B \qquad \text{(A)}$$

- Orthogonalität und Rotation um 90° sind äquivalente Betrachtungen des gleichen Zusammenhangs.
- Die Drehrichtung in Gl. (A) ergibt sich aus der Betrachtung der Vorzeichen in den vier Quadranten (s.u.).



$$\Rightarrow \quad \boxed{\cos\theta = \frac{[x_A\ y_A] \cdot [x_B\ y_B]^T}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|}}$$

$\theta < 90° \Leftrightarrow \underline{a}\cdot\underline{b} > 0$
$\theta = 90° \Leftrightarrow \underline{a}\cdot\underline{b} = 0$
$\theta > 90° \Leftrightarrow \underline{a}\cdot\underline{b} < 0$

Skalarprodukt, Orthogonalität (2D)

Angefangen bei +/+ als x-/y-Vorzeichen des I. Quadranten, erhält man das Vorzeichen des jeweils nächsten (d.h.: gegen den Uhrzeigersinn gelegenen) Quadranten, indem man

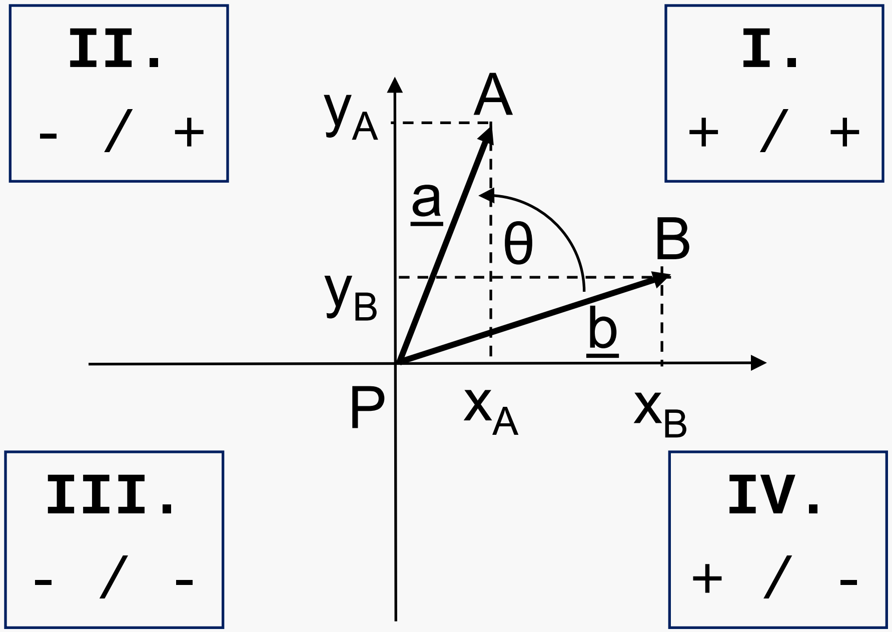
- als x-Vorzeichen das negierte y-Vorzeichen des letzten
- als y-Vorzeichen das x-Vorzeichen des letzten nimmt.

D.h.: Gegenüber dem Vektor $\underline{v} = [\ x\ ,\ y\ ]$

ist der (betragsgleiche) Vektor $\underline{v}^{\perp} = [\ -y\ ,\ x\ ]$

um +90° gedreht (orthogonaler, engl. *perp vector*).

Dies gilt unabhängig von den Vorzeichen von x und y.



Skalarprodukt, Orthogonalität (2D)

Rechenregeln für das Skalarprodukt:

- Das Skalarprodukt ist kommutativ:*

  $\underline{a} \bullet \underline{b} = \underline{b} \bullet \underline{a}$

- Das Skalarprodukt ist <u>nicht</u> assoziativ:*

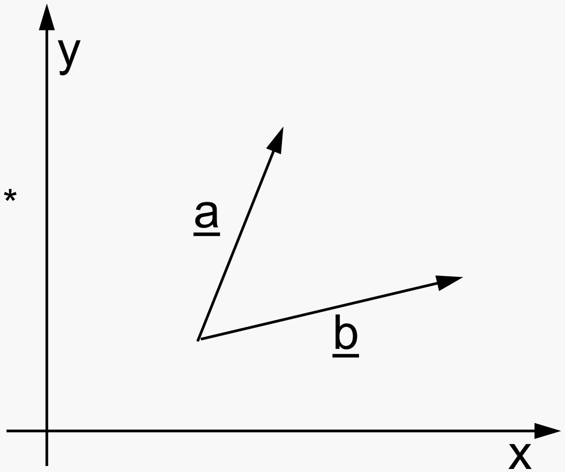
  $\underline{a} \bullet (\underline{b} \bullet \underline{c}) \neq (\underline{a} \bullet \underline{b}) \bullet \underline{c}$

- Betrag (Länge) $|\underline{a}|$ eines Vektors $\underline{a}$:

  $\underline{a} \bullet \underline{a} = |\underline{a}|^2 \Rightarrow |\underline{a}| = (\underline{a} \bullet \underline{a})^{½}$

- Einheitsvektor $\underline{e}_a$ in Richtung von $\underline{a}$:

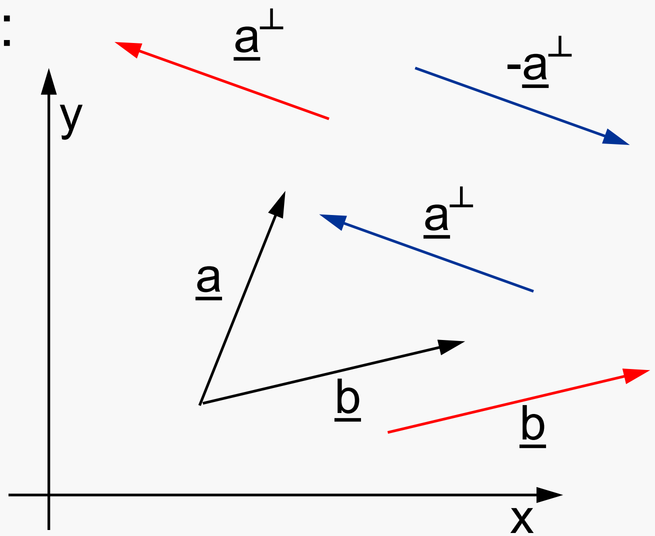
  $\underline{e}_a = \underline{a} \,/\, |\underline{a}| = |\underline{a}| \,/\, (\underline{a} \bullet \underline{a})^{½}$



* Im Gegensatz zum Matrizenprodukt

Skalarprodukt, Orthogonalität (2D)

Eigenschaften des orthogonalen Vektors:



- Orthogonalität:

  $\underline{a}^{\perp} \bullet \underline{a} = 0$

- Negation durch doppelte Drehung:

  $\underline{a}^{\perp\perp} = -\,\underline{a}$

- Betrags-/ Längengleichheit:

  $|\underline{a}^{\perp}| = |\underline{a}|$

- Linearität:

  $(\underline{a} + \underline{b})^{\perp} = \underline{a}^{\perp} + \underline{b}^{\perp}$

- Antisymmetrie d. Skalarprodukts (engl. *perp dot product*):

  $\underline{a}^{\perp} \bullet \underline{b} = -\,\underline{a} \bullet \underline{b}^{\perp}$