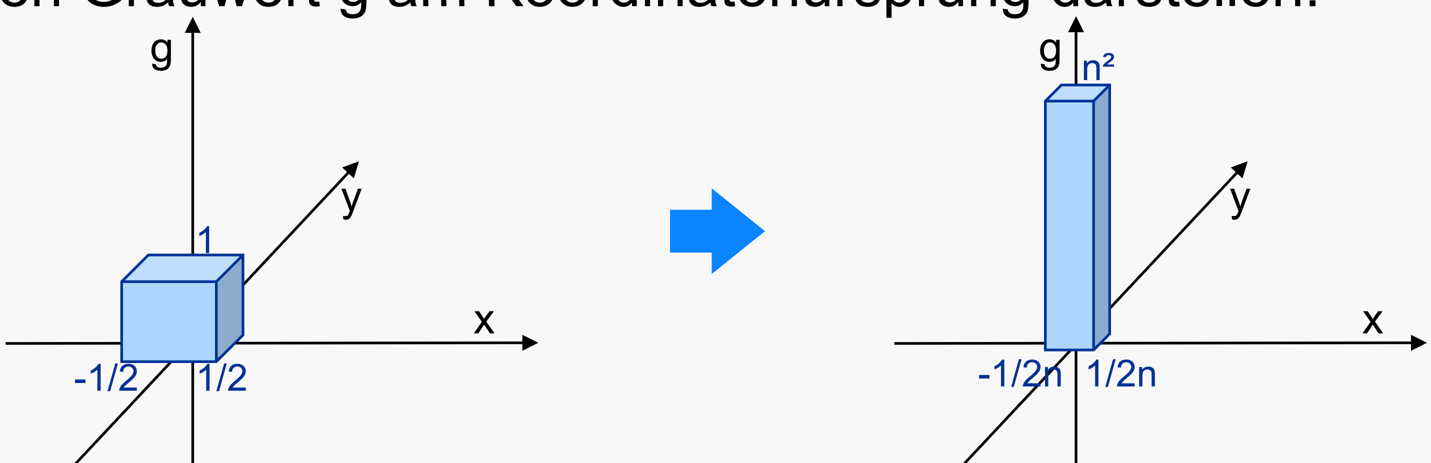
Das Bild als Signal

- **Signal**: Funktion (Werteverlauf) als Informationsträger im Ortsbereich (f(x,y), z.B. Bild) o.i. Zeitbereich (f(t), z.B.Ton)

  Denkmodell aus der linearen Signalverarbeitung:

  Bild (=Signal) als Anordnung infinitesimaler „Punktquellen“
- Konzept der **Punktquelle**: Grenzwert eines Quaders, dessen Grundfläche einen Bildpunkt und dessen Volumen den Grauwert g am Koordinatenursprung darstellen:



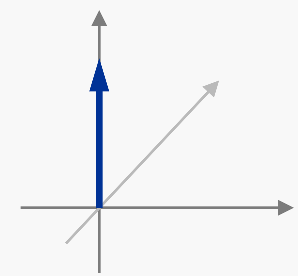
$$\text{Rechteck-Funktion: } rect(x,y) = \begin{cases} n^2 & \text{für } |x| \leq 1/(2n) \text{ und } |y| \leq 1/(2n) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Das Bild als Signal

Der (als existent angenommene) Grenzwert der Punktquelle für $n \rightarrow \infty$ ist das sog. **Dirac Delta** (die Dirac-Impulsfunktion):
Funktion, die um den Koordinatenursprung einen Quader mit verschwindend kleiner Grundfläche, unendlicher Höhe und Volumen =1 bildet, und die sonst überall =0 ist:

$$\int\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x,y)\,dx\,dy = 1$$

Symbol:



Für das Produkt einer beliebigen, reellwertigen Funktion g(x,y) mit der Delta-Funktion gilt demnach:

$$\int\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) \cdot \delta(x,y)\,dx\,dy = g(0,0)$$

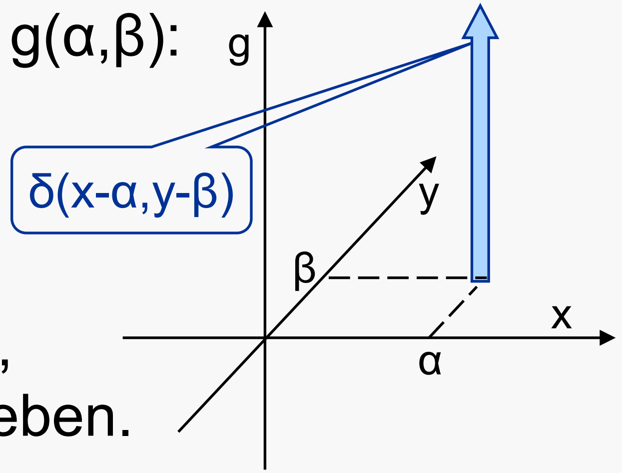
Siebeigenschaft von δ
(engl. *sifting property*)

(g(x,y) kann den Helligkeitsverlauf in einem Bild darstellen.)

Das Bild als Signal

Mit dem Dirac-Impuls gilt für den Wert von $g(\alpha,\beta)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int g(x,y) \cdot \delta(x-\alpha,y-\beta)\,dx\,dy \;=\; g(\alpha,\beta)$$



Ausdruck zur „Probe-Entnahme“, geeignet, Funktionen beliebigen Verlaufs wiederzugeben.

Nutzung der Symmetrie [d.h.: $\delta(\alpha-x,\beta-y) = \delta(x-\alpha,y-\beta)$]

und Vertauschung der Bezeichner [$g(x,y) \Rightarrow f(\alpha,\beta)$] ergibt:

$$f(x,y) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int f(\alpha,\beta) \cdot \delta(x-\alpha,y-\beta)\,d\alpha\,d\beta$$

Interpretation: Funktionswert einer kontinuierlichen Funktion f bei (x,y) als Integral über den unendlichen Definitionsbereich des Produktes mit dem diskreten δ-Impuls; z.B. (s.o.):

Wiedergabe eines Bildes als Anordnung von Punktquellen

Das Bild als Signal

Die Verarbeitung von Signalen wird technisch-mathematisch durch den Einsatz von Systemen beschrieben.

- Definition: Als **System** bezeichnen wir

- Eine Menge von Komponenten

  (Gegenständen, Individuen, Größen, Prozessen, Ideen),

- die untereinander in einer kausalen Wechselwirkung stehen
- und von ihrer Umgebung entweder als abgeschlossen oder als in einer wohldefinierten Beziehung stehend betrachtet werden können

  sowie

- die Gesamtheit der unter ihnen herrschenden Beziehungen.

Insb. technische Systeme werden auch als Abbildung einer Menge von Eingabegrößen auf eine Menge von Ausgabegrößen betrachtet:

„*A system is a mapping of a set of inputs into a set of outputs.*” (Ph. Laplante)

Das Bild als Signal

- Im Sinne dieser Definition kann jedes System in beliebig viele Teil- oder Subsysteme zerlegt werden, sofern dies sinnvoll erscheint.
- Die Existenz von Systemen ist meist mit der Erfüllung eines Zweckes verbunden (vgl. technische, politische, soziale, Regal-, Gleichungs- oder Planetensysteme).
- Der Begriff "System" ist ein Idealtypus:

  Idealbild, erzeugt durch Steigerung bestimmter Elemente der Realität

  Komponenten sind selten abgeschlossen, nicht immer unterscheidbar, Beziehungen kaum einmal "wohldefiniert"

  z.B.: Verkehrssysteme, politische Systeme –
  Ggs.: philosophische, mathematische (Gleichg.-) Systeme

  Software-Systeme lassen sich meist in guter Näherung durch Idealtypen beschreiben (trotz Digitalisierungsfehler, Fremdeinflüssen durch Betriebssystem u.ä.)

Aus der ersten SysProg-Klausur (WS 01/02, Aufgabe 1b):

Die (als ideal angenommene) Lotto-Ziehung erzeugt jede Woche einen neuen Satz (Gruppe) von 6 Zahlen. Dieser Satz ist wohldefiniert, abgeschlossen und unterscheidbar gegenüber allen anderen Zahlen-Sätzen aus anderen Ziehungen.

Lassen sich diese Zahlensätze als Komponenten eines Systems auffassen (bestehend aus dem Zahlen-Satz der Ziehung vom ..., der Ziehung vom ... etc.)?

Wenn ja: Beschreiben Sie ein solches System in wenigen Worten (nur besondere Merkmale);
Wenn nein: Warum nicht? Läßt sich der Umstand beheben?

Nein: Es fehlt ein kausaler Zusammenhang zwischen den einzelnen Lotto-Ziehungen. Der Umstand läßt sich nicht beheben, weil die Ziehung der Lotterie nicht mehr zufällig wäre.

Das Bild als Signal

Wissen um die Verarbeitung von Bildern als Anordnungen von Punktquellen f(x,y) durch ein **lineares System** (mathem. dargestellt durch linearen Operator H [f(x,y)]) erleichtert die Berechnung des Verarbeitungsergebnisses.

- **Linearität** bedeutet **Additivität**:

  $$H[\, f_1(x,y) + f_2(x,y) \,] = H[\, f_1(x,y) \,] + H[\, f_2(x,y) \,]$$

  – i.W.: Die Antwort auf die Summe beliebiger Erregungen (Eingangssignale, -größen) ist gleich der Summe der Antworten auf die einzelnen Erregungen.

  Daraus folgt unmittelbar die **Homogenität** (α konstant):

  $$H[\, \alpha \cdot f_1(x,y) \,] = \alpha \cdot H[\, f_1(x,y) \,]$$

  und daraus allgemeiner (α, β konstant):

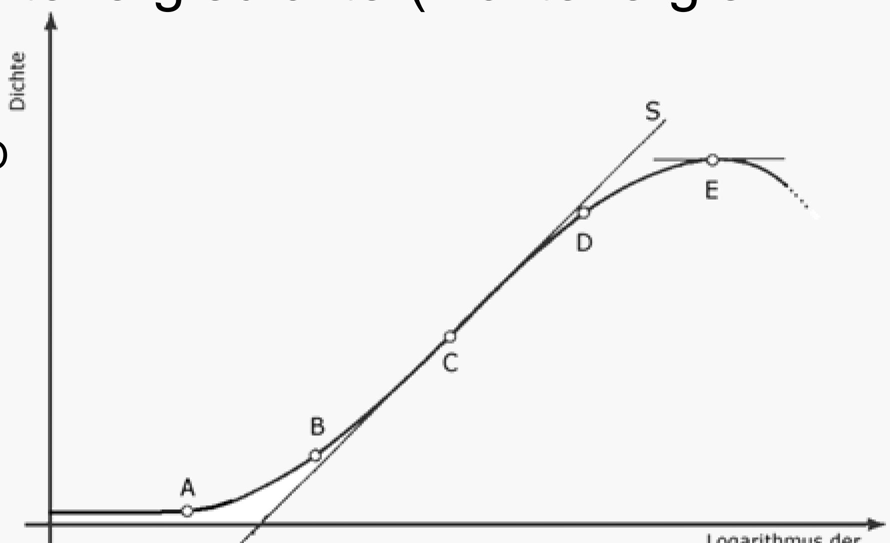
  $$H[\, \alpha \cdot f_1(x,y) + \beta \cdot f_2(x,y) \,] = \alpha \cdot H[\, f_1(x,y) \,] + \beta \cdot H[\, f_2(x,y) \,]$$

Das Bild als Signal

Beispiele zu linearen Systemen:

Die Schwärzung („optische Dichte“) S_O der Oberfläche eines Objektes ist definiert als der Logarithmus des Verhältnisses I_{aO} / I_{mO} der auf diese Fläche aufgestrahlten zu der vor ihr gemessenen / fotografierten Lichtenergiedichte (Lichtenergie pro Fläche und Zeit):

$$S_O = \lg (I_{aO} / I_{mO}) = \lg I_{aO} - \lg I_{mO}$$



Grafik: Wikipedia

Aufnahme der Schwärzung S_O im linearen Arbeitsbereich der sog. Gamma-Kurve eines Films erzeugt eine Filmschwärzung S nach der linearen Beziehung:

$$S = \gamma \cdot S_O + c \qquad (\gamma, c \text{ konstant})$$

$$= \gamma \cdot (\lg I_{aO} - \lg I_{mO}) + c$$

Übertragungs- oder Systemfunktion des Films

1. <u>Beispiel zu linearen Systemen:</u>

Eingangsgrößen: Beleuchtung I_{aO}, Belichtung I_{mO} oder Objektschwärzung S_O; Ausgangsgröße: Schwärzung S

- Änderung d. aufgestrahlten (I_{aO}) bzw. d. aufgenommenen (I_{mO}) Lichtenergiedichte um eine multiplikative Konstante α (z.B. durch Variation der Beleuchtung, der Belichtungszeit oder der Blende) führt zu Aufnahme mit der Schwärzung

$$S' = \gamma \cdot \lg(\alpha \cdot I_{aO} / I_{mO}) + c = \gamma \cdot (\lg(\alpha) + S_O) + c$$
$$= \gamma \cdot \lg(\alpha) + S \neq \alpha \cdot S$$

$S(I_{aO})$, $S(I_{mO})$ <u>nicht</u>linear

- Änderung der aufzunehmenden Objektschwärzung S_O (z.B. durch Filter) auf $S_O'' = \alpha \cdot S_O$ führt zur Filmschwärzung:

$$S'' = \gamma \cdot (\alpha \cdot S_O) + c \neq \alpha \cdot (\gamma \cdot S_O + c).$$

$S(S_O)$ <u>nicht</u>linear

Die Systemfunktionen $S(I_{aO})$, $S(I_{mO})$, $S(S_O)$ sind **<u>nicht</u>linear!**

2. <u>Beispiel zu linearen Systemen:</u>

Eingangsgröße: Kontrast (d.h. Schwärzungsdifferenz) am Objekt: $\Delta S_O = S_{O2} - S_{O1}$

Ausgangsgröße: Kontrast ΔS an seinem Abbild:

$$\Delta S \quad = S_2 - S_1 = \gamma \cdot S_{O2} + c - (\gamma \cdot S_{O1} + c) = \gamma \cdot (S_{O2} - S_{O1})$$
$$= \gamma \cdot \Delta S_O$$

Änderung auf $\Delta S_O' = \alpha \cdot \Delta S_O$ (z.B. Nebel, Filter) ergibt

wegen $\alpha \cdot \Delta S_O = \alpha \cdot (S_{O2} - S_{O1}) = \alpha \cdot S_{O2} - \alpha \cdot S_{O1}$

$$\Delta S' \quad = S_2' - S_1' = \gamma \cdot \alpha \cdot S_{O2} + c - (\gamma \cdot \alpha \cdot S_{O1} + c)$$
$$= \alpha \cdot \gamma \cdot (S_{O2} - S_{O1}) = \alpha \cdot \gamma \cdot \Delta S_O \qquad \text{bzw.}$$
$$\Delta S' \quad \mathbf{=} \alpha \cdot \Delta S$$

d.h.: Kontraständerung = Schwärzungsänderung

⇨ Das System $\Delta S = f(\Delta S_O)$ **<u>ist linear.</u>**

[D.h.: Fotos sind lineare Abbildungen der aufgenommenen Kontraste – nicht der absoluten Lichtverhältnisse oder Farbtöne.]

Das Bild als Signal

- Verarbeitung (d.h. Abbildung) eines Ursprungsbildes f(x,y) zu einem Ergebnisbild g(x,y) durch den Operator H[ ]:

$$g(x,y) = H\left[\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int f(\alpha,\beta)\cdot\delta(x-\alpha,y-\beta)\,d\alpha\,d\beta\right]$$

z.B.: Betrachtung v. Kontrasten

- Ist H **linear**, so gilt (da Integration=Summenbildung):

$$g(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int H\left[f(\alpha,\beta)\cdot\delta(x-\alpha,y-\beta)\,d\alpha\,d\beta\right]$$

z.B.: keine Linsenschäden

- Ist H auch **ortsinvariant** (engl. *space* bzw. *shift invariant*, d.h.: H [f(x–α,y–β)] = g(x–α,y–β) ∀ α, β), so ist:

$$g(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int f(\alpha,\beta)\cdot\underbrace{H\left[\delta(x-\alpha,y-\beta)\right]}_{\text{„Systemkonstante } h(x,y)\text{“}}\,d\alpha\,d\beta$$

Das Bild als Signal

- Die Funktion

  $$\mathbf{h(x,y)} = H\,[\,\delta(x,y)\,]$$

  ist die Abbildung einer Punktquelle durch das zugrunde liegende (lineare, ortsinvariante) Verarbeitungssystem.

  Sie ist die Impulsantwort (engl. *impulse response*) des Systems: Reaktion auf d. Erregung mit einem Lichtimpuls.

  Mit ihr ist das (lineare, ortsinv.) Abbildungssystem erfaßt

  („Aufnahme-Güte“ unabhängig vom Aufnahme-Motiv).

- h(x,y) wird als **Punkt-Spreiz-Funktion** (engl. *point spread function*), **PSF**, auch: (Punkt-) Verschmierungsfunktion oder Unschärfe-Funktion) bezeichnet, weil sie in reellen Optik-Systemen die infinitesimal kleinen Punktquellen stets in endlicher Größe abbildet.

Das Bild als Signal

- Die Einführung der PSF $h(x,y) = H\,[\,\delta(x,y)\,]$ vereinfacht die Berechnung des Ergebnisbildes zu:

$$\mathbf{g(x,y) = \int\!\!\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha,\beta) \cdot h(x-\alpha,y-\beta)\, d\alpha\, d\beta}$$

- Dieser Integraltyp wird Faltungsintegral, die (lineare**!**) Operation wird **Faltung** (engl. *convolution*) der Funktionen $f(x,y)$ und $h(x,y)$ genannt und symbolisch geschrieben als:

$$\mathbf{g(x,y) = f(x,y) * h(x,y)}$$

Die Faltung ist kommutativ:

$$\mathbf{f(x,y) * h(x,y) = h(x,y) * f(x,y)}$$

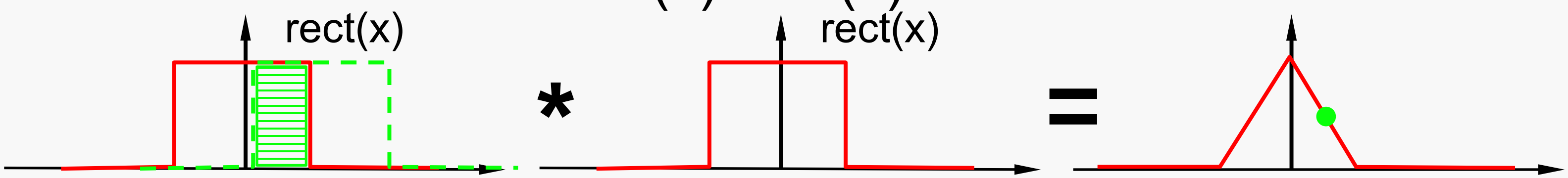
<u>Beispiel für PSF:</u>

Nachtfotos von Sternen als Punktquellen am Himmel:

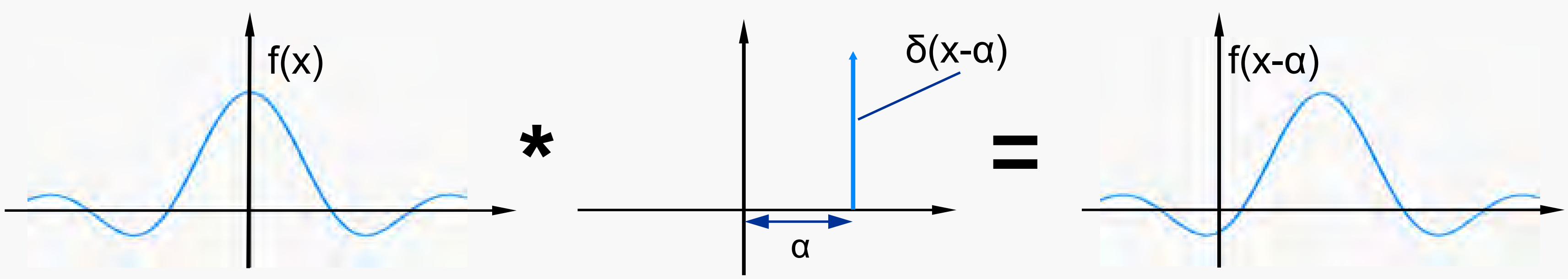
PSF durch Linsen, Erdumdrehung, Erschütterungen

Das Bild als Signal

- Als Integral läßt sich die Faltung zweier eindimensionaler Funktionen veranschaulichen als die Wachstumsfunktion der Fläche, die von den Graphen beider Funktonen eingeschlossen wird, wenn sie übereinander geschoben werden – z.B. für rect(x)*rect(x):

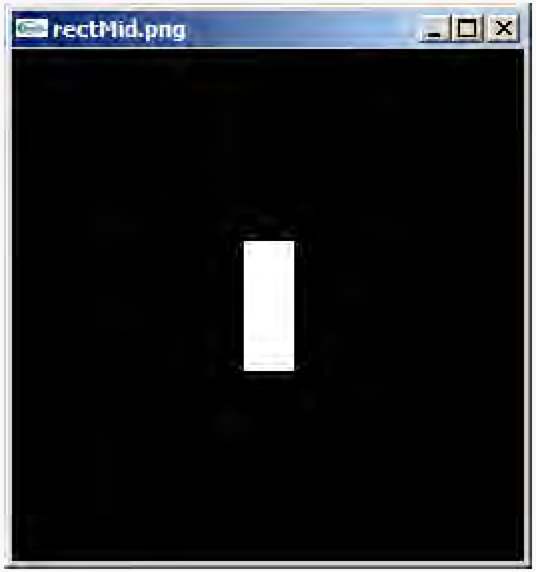


- Definitionsgemäß ergibt die Faltung der (evtl. verschobenen) δ-Funktion mit einer Funktion f(x) den Werteverlauf der (evtl. verschobenen) Funktion f(x):



Das Bild als Signal

- Im Kontext der Bildverarbeitung kann jede Funktion sowohl das Bildsignal, als auch die Systemfunktion repräsentieren – z.B. die Rechteck-Funktion:

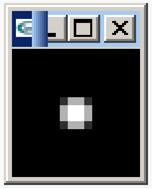


*

1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

=

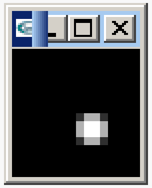
oder der (versetzte) δ-Impuls:



*

				1

=



Das Bild als Signal

In digitalen Systemen

- … ist die Impulsantwort (PSF) mind. 1x1 Pixel: **Maske**!
- … wird aus dem doppelten Integral eine doppelte Summe (doppelte, geschachtelte Schleife für jedes Pixel); bei einer MxN-Maske berechnet sich jedes Pixel g(x,y) zu:

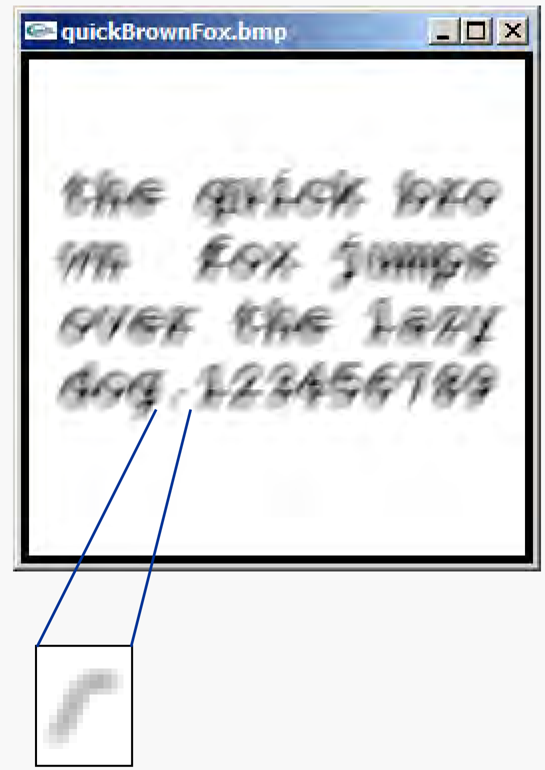
  $$g(x,y) = 1/(M \cdot N) \cdot \sum_{M} \sum_{N} f(m,n) \cdot h(x-m, y-n)$$

- … wird h(y-β) durch Umkehrung der Reihenfolge der Zeilen, h(x-α) durch Umkehrung der Spalten gebildet.
- … stellen PSF-Masken mit positiven Elementen eine virtuelle Aufzeichnung der durchlaufenen Positionen bei der Verwacklung eines Bildmotivs dar; die Beträge der Masken-Elemente geben die Anteile dieser Positionen an der Mehrfach-Belichtung wieder.

Das Bild als Signal

Beispiel einer virtuellen Verwacklung:

$$
* \quad
\begin{bmatrix}
 & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & & & & \\
 & & & 1 & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & & \\
1 & & & & & & & &
\end{bmatrix}
\quad =
$$



Übung: `DIPops.c`