Globale Operationen

- Operationen / Funktionen, die alle Pixel des Eingabebildes benötigen, bevor sie ein Pixel oder eine Aussage für das Ergebnisbild ermitteln, nennt man **global**.

  (Beispiel: Erkennung / Behebung von Unschärfe)

- Wichtiges mathem. Werkzeug: **Fourier-Transformation**

  - entwickelt 1807 von Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830, F), inspiriert vom Problem der schwingenden Saite

  - veröffentlicht erst 1822 mit Studien zur Wärmeausbreitg aufgrund massiver Bedenken führender Mathematiker

- Fourier konstatierte: **Beliebige periodische Funktionen** können durch eine Summe gewichteter **Sinus- und Cosinus-**Funktionen unterschiedlicher Frequenzen **exakt** (verlustfrei) **wiedergegeben** (nicht: approximiert!) werden.

  Man beachte: Reales (gedämpftes) Pendel schwingt <u>nicht</u> periodisch; Herztöne, Gezeiten,…, verlaufen periodisch.

Fourier-Reihen

- Anliegen von Fourier:

  Approximation periodischer Fkt. f(x) als Linearkombination von (2π-) periodischen trigonometrischen Funktionen

  cos(0x), sin(0x), cos(x), sin(x), cos(2x), sin(2x), ... bzw.

  1, cos(x), sin(x), cos(2x), sin(2x), ..., cos(nx), sin(nx)

- Hintergrund / Ziel:
  - Effizientere (d.h.: ebenso wirksame, weniger aufwendige) Codierung period. Funktionen (vgl.: Ton-Kompression)
  - Erfassung nicht explizit bekannter periodischer Vorgänge (vgl.:Sternbewegung,Bahnhofsuhr,Atmung,Gezeiten,EKG)

- Approximationsansatz mit dem sog. **Fourier-Polynom**:

$$g_n(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{n} \{ a_k \cdot \cos(k \cdot x) + b_k \cdot \sin(k \cdot x) \} \approx f(x)$$

- Forderung: Minimale Abweichung im quadratischen Mittel

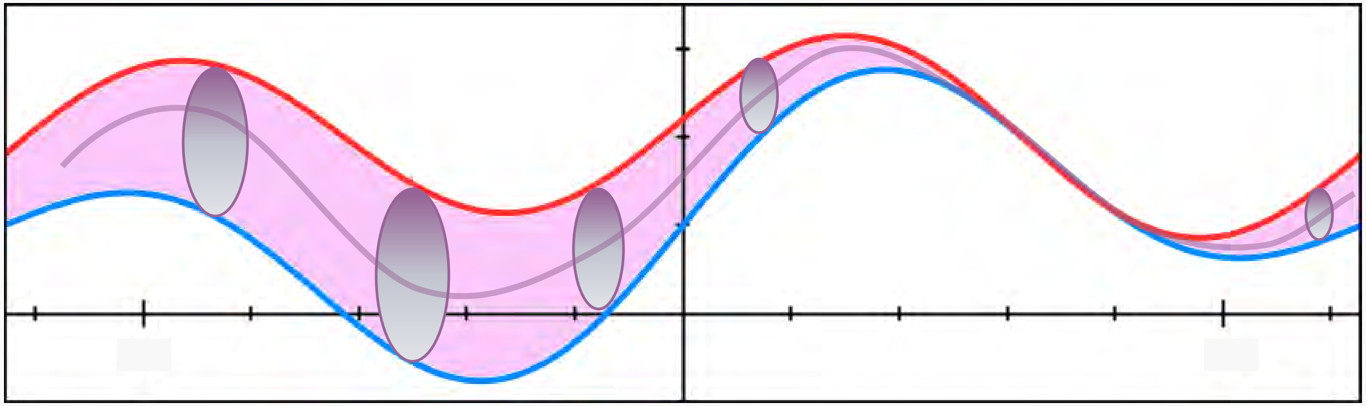
Fourier-Reihen

- Forderung (Forts.):

  Minimierung der Differenz zwischen d. approximierenden Funktion $g_n(x)$ u. d. gegebenen Funktion f(x) in d. L_2-Norm

$$F := \| g_n(x) - f(x) \|_2{}^2 := \int_{-\pi}^{\pi} [\, g_n(x) - f(x) \,]^2 \, dx = \text{Min!}$$

  D.h.: Minimierung des Volumens eines „Schlauchs“, dessen variabler Querschnitt dem Quadrat der Differenzen zwischen $g_n(x)$ und f(x) proportional ist.



Mathematische Formulierung der Minimierungsforderung

$$F := \int_{-\pi}^{\pi} [\, g_n(x) - f(x) \,]^2 \; dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} [\tfrac{1}{2}\, a_0 + \sum_{k=1}^{n} \{ a_k \cdot \cos(k \cdot x) + b_k \cdot \sin(k \cdot x) \} - f(x)]^2 \, dx \overset{!}{=} \text{Min}$$

bedeutet, in 2n+1 Gln (für a_0, a_k, b_k) 1. Ableitg=0 zu setzen.
(Extremwerte quadratischer Funktionen sind Minima!)

… ⇨ $\partial F/\partial a_0 = \pi\, a_0 - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx \; (\ldots) \overset{!}{=} 0$

$$\partial F/\partial a_k = -\, 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(k \cdot x)\, dx + 2 \cdot \pi \cdot a_k \overset{!}{=} 0, \; (k = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\partial F/\partial b_k = -\, 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(k \cdot x)\, dx + 2 \cdot \pi \cdot b_k \overset{!}{=} 0, \; (k = 1, 2, \ldots, n)$$

Daraus ergibt sich für die **Fourier-Koeffizienten von f(x)**:

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{a_0} &= 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \\
\mathbf{a_k} &= 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(k \cdot x)\,dx \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \\
\mathbf{b_k} &= 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(k \cdot x)\,dx \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)
\end{aligned}\right\} \text{Euler-Fouriersche Formeln}$$

Es stellt sich heraus, daß (wenn die o.a. Integrale existieren) das Fourier-Polynom $g_n(x)$ für $n \rightarrow \infty$ gegen die approximierte periodische Funktion f(x) konvergiert, d.h.:

$$f(x) = ½\, a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{ a_k \cdot \cos(k \cdot x) + b_k \cdot \sin(k \cdot x) \}$$

Fourier-Reihen

- Brook Taylor (1685-1731, GB) entwickelte Reihen, z.B.:

  $\sin x = x/1! - x^3/3! + x^5/5! - \ldots + (-1)^n x^{2n+1} / (2n+1)! \pm \ldots$

  $\cos x = 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + \ldots + (-1)^n x^{2n} / (2n)! \pm \ldots$

- Leonhard Euler (1707-1783, CH) führte die Zahl e ein:

  $e = \lim_{n \to \infty} (1+1/n)^n = 2{,}718281828\ldots$ (als Grenzwert)

  bzw., als unendliche Reihe:

  $e = 1/0! + 1/1! + 1/2! + 1/3! + \ldots$

  und $e^{\alpha x}$ nach Reihenentwicklung (bel. konst. Faktor α):

  $e^{\alpha x} = 1 + \alpha \cdot x + (\alpha \cdot x)^2/2! + (\alpha \cdot x)^3/3! + (\alpha \cdot x)^4/4! + \ldots$

- Für $\alpha = j = (-1)^{½}$ folgt daraus die **Eulersche Identität**

  $e^{j \cdot x} = 1 + j \cdot x - x^2/2! - j \cdot x^3/3! + x^4/4! + j \cdot x^5 / 5! \ldots$

  $= [\, 1 - x^2/2! + x^4/4! - + \ldots] + j \cdot [\, x - x^3/3! + x^5/5! - + \ldots]$

  $\boxed{\mathbf{e^{\pm j \cdot x} = \cos x \pm j \cdot \sin x}}$ (auch: Eulersche Funktion, 1749)

Fourier-Reihen

Einsetzen der Eulerschen Identität in das Fourier-Polynom:

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\, a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{\, a_k \cdot \cos(k\cdot x) + b_k \cdot \sin(k\cdot x) \,\}$$

$$\begin{aligned}
= \tfrac{1}{2}\, a_0 + \tfrac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \{\, & a_k \cdot \cos(k\cdot x) + \overbrace{b_k \cdot \sin(k\cdot x)}^{= j\cdot b_k\cdot(-\, j\cdot\sin(k\cdot x))} \\
& - j\cdot a_k \cdot\sin(k\cdot x) + j\cdot b_k \cdot\cos(k\cdot x) \\
& + a_k \cdot \cos(k\cdot x) + b_k \cdot \sin(k\cdot x) \\
& + j\cdot a_k \cdot\sin(k\cdot x) - j\cdot b_k \cdot\cos(k\cdot x) \,\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \tfrac{1}{2}\, a_0 + \tfrac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \{\, & (a_k + j\cdot b_k) \cdot (\cos(k\cdot x) - j\cdot\sin(k\cdot x)) \\
& + (a_k - j\cdot b_k) \cdot (\cos(k\cdot x) + j\cdot\sin(k\cdot x)) \,\}
\end{aligned}$$

$$= \underbrace{\tfrac{1}{2}\, a_0}_{c_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \{\, \underbrace{\tfrac{1}{2}\cdot(a_k + j\cdot b_k)}_{c_{-k}}\cdot e^{-j\cdot k\cdot x} \,\} + \sum_{k=1}^{\infty} \{\, \underbrace{\tfrac{1}{2}\cdot(a_k - j\cdot b_k)}_{c_k}\cdot e^{j\cdot k\cdot x} \,\}$$

$$f(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [\, (c_{-k}) \cdot e^{-j \cdot k \cdot x} + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k) \cdot e^{j \cdot k \cdot x} \,]$$

$$\boxed{\mathbf{f(x)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \cdot e^{j \cdot k \cdot x} \qquad \textbf{Fourier-Reihe}}$$

mit

$$c_0 = ½ \cdot a_0 = 1/(2\pi) \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = 1/(2\pi) \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{0 \cdot x}\, dx$$

und

$$c_{\mp k} = (1/2) \cdot [\, \overbrace{(1/\pi) \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(k \cdot x)\, dx}^{a_k} \pm \overbrace{(j/\pi) \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(k \cdot x)\, dx}^{j \cdot b_k} \,]$$

$$= (1/2\pi) \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot [\, \cos(k \cdot x) \pm j \cdot \sin(k \cdot x) \,]\, dx$$

$$= 1/(2\pi) \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{\pm j \cdot k \cdot x}\, dx \,,\ k = 1, 2, 3, \ldots$$

entgegen-
gesetztes
Vorzeichen
v. Index u.
Exponent

Fourier-Reihen

Allgemeine Form der **Fourier-Koeffizienten**:

$$\boxed{c_k = 1/(2\pi) \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-j \cdot k \cdot x}\, dx} \quad k \in \mathbb{Z}$$

(d.h.: k=…, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,…)

Die Folge c_k der Fourier-Koeffizienten einer periodischen Funktion f(x) wird als **diskretes Spektrum** von f bezeichnet.

Man beachte:

- In der Fourier-Reihe $f(x)=\Sigma\ c_k \cdot e^{j \cdot k \cdot x}$ ist die Information über f(x) nur in der Größe (u. d. Anzahl) der Werte c_k enthalten;

  diese sind von x <u>un</u>abhängig (bestimmte Integrale) und bei Kenntnis einer Periode ($-\pi \leq x \leq \pi$) von f(x) berechenbar.
- Der Verlauf von f (die Werte für alle x) wird dargestellt als Summe gewichteter Sinus- / Cosinus-Schwingungen mit Perioden, die ganzzahlige Teiler von 2π sind ($2\pi/2, 2\pi/3, \ldots$)
- Die komplexe Schreibweise ist kompakter; sie ändert aber nichts am reellwertigen Zusammenhang bei f(x): $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Fourier-Reihen

Beispiel: Die Koeffizienten eines Fourier-Polynoms seien:

$a_0=4$; $a_1=0{,}2$; $b_1=0$; $a_2=0$; $b_2=1$; $a_i=b_i=0$ für $i>2$

d.h.:

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\, a_0 + \sum_{k=1}^{2} \{ a_k \cdot \cos(k\cdot x) + b_k \cdot \sin(k\cdot x) \}$$

$$= 4/2 + 0{,}2\cdot\cos(x) + 0\cdot\sin(x) + 0\cdot\cos(2x) + 1\cdot\sin(2x)$$

$$= 2 + 0{,}2\cdot\cos(x) + \sin(2x)$$

Komplexe Schreibweise:

$$f(x) = \sum_{k=-2}^{+2} c_k \cdot e^{j\cdot k\cdot x}\,,$$ mit dem diskreten Spektrum:

$c_0 = \tfrac{1}{2}\cdot a_0 = 2$

$c_{-k} = \tfrac{1}{2}\cdot(a_k + j\cdot b_k) \Rightarrow c_{-1} = \tfrac{1}{2}\cdot(0{,}2+j\cdot 0) = 0{,}1$; $c_{-2} = \tfrac{1}{2}\cdot(0+j) = j/2$

$c_k = \tfrac{1}{2}\cdot(a_k - j\cdot b_k) \Rightarrow c_1 = \tfrac{1}{2}\cdot(0{,}2-j\cdot 0) = 0{,}1$; $c_2 = \tfrac{1}{2}\cdot(0-j) = -j/2$

Beispiel: [Forts. $f(x) = 2 + 0{,}2\cdot\cos(x) + \sin(2x)$]

Fourier-Reihe in komplexer Schreibweise:

diskretes Spektrum

$c_{-2} = j/2;\ \ c_{-1} = 0{,}1;$

$c_0 = 2$

$c_1 = 0{,}1;\ \ c_2 = -j/2$

$$f(x) = \sum_{k=-2}^{+2} c_k \cdot e^{j\cdot k\cdot x}$$

$$= j/2\cdot e^{-j\cdot 2\cdot x} + 0{,}1\cdot e^{-j\cdot x} + 2 + 0{,}1\cdot e^{j\cdot x} - j/2\cdot e^{-j\cdot 2\cdot x}$$

$$= j/2\cdot(\cos(2x) - j\cdot\sin(2x)) + 0{,}1\cdot(\cos(x) - j\cdot\sin(x)) + 2$$
$$+ 0{,}1\cdot(\cos(x) + j\cdot\sin(x)) - j/2\cdot(\cos(2x) + j\cdot\sin(2x))$$

$$= \sin(2x)/2 + 0{,}1\cdot\cos(x) + 2 + 0{,}1\cdot\cos(x) + \sin(2x)/2$$

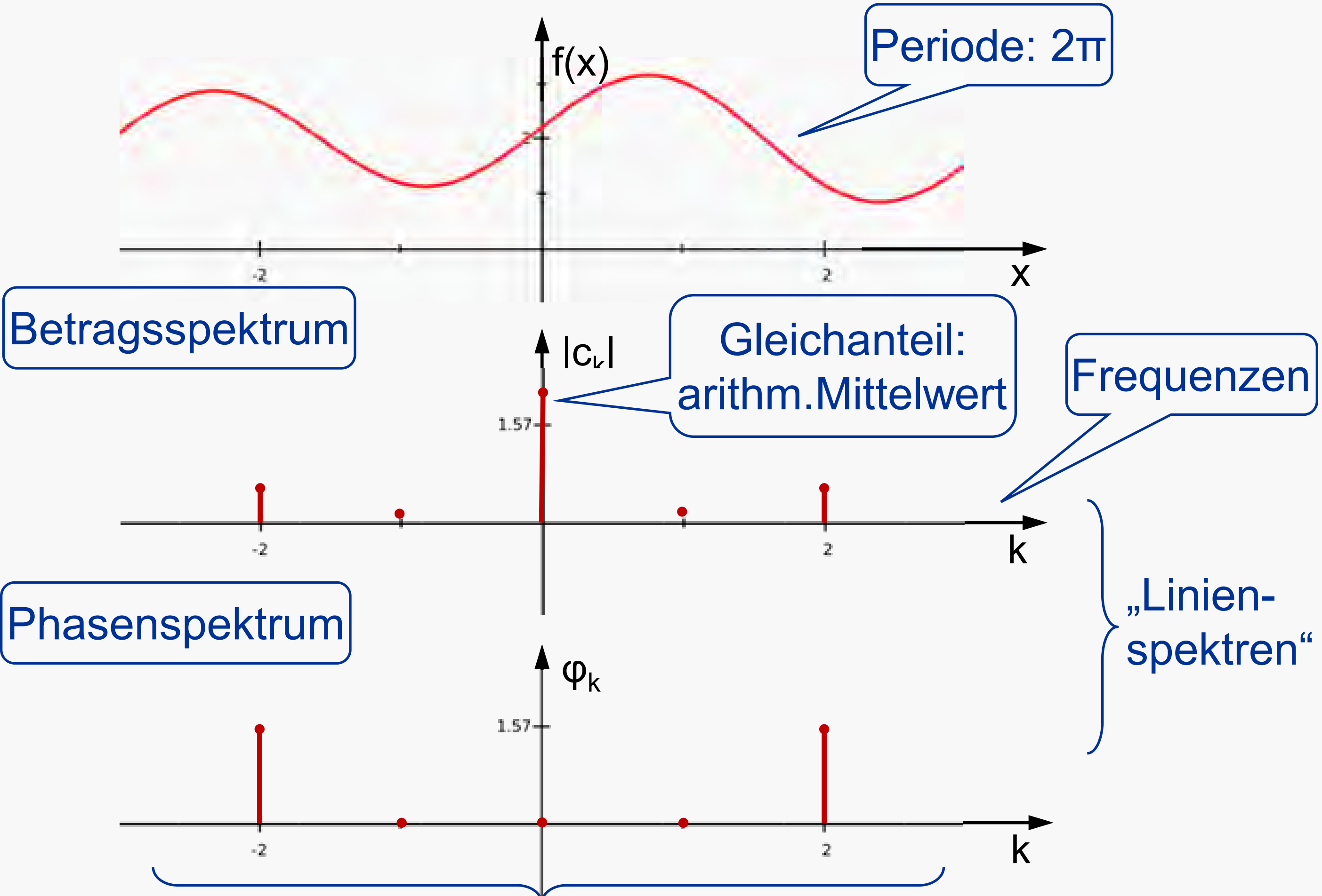
$$= \sin(2x) + 0{,}2\cdot\cos(x) + 2$$

⇨ Möglichkeit der Darstellung periodischer Funktionen über den Betrag ihres Spektrums („Betragsspektrum“)

Fourier-Reihen

Fourier-Spektren einer Funktion – z.B.:

$f(x) = 2 + 0{,}2 \cdot \cos(x) + \sin(2 \cdot x)$



reellwertige Funktionen haben symmetrische Spektren!

diskretes Spektrum

$c_{-2} = j/2;\ c_{-1} = 0{,}1;$
$c_0 = 2$
$c_1 = 0{,}1;\ c_2 = -j/2$

Betrag=(Re²+Im²)^½

$|c_{-2}|=[0^2+(½)^2]^{½} = 0{,}5$
$|c_{-1}|=[(0{,}1)^2+0^2]^{½}=0{,}1$
$|c_0|=[2^2+0^2]^{½} = 2$
$|c_1|=[(0{,}1)^2+0^2]^{½}=0{,}1$
$|c_2|= [0^2+(-½)^2]^{½}=0{,}5$

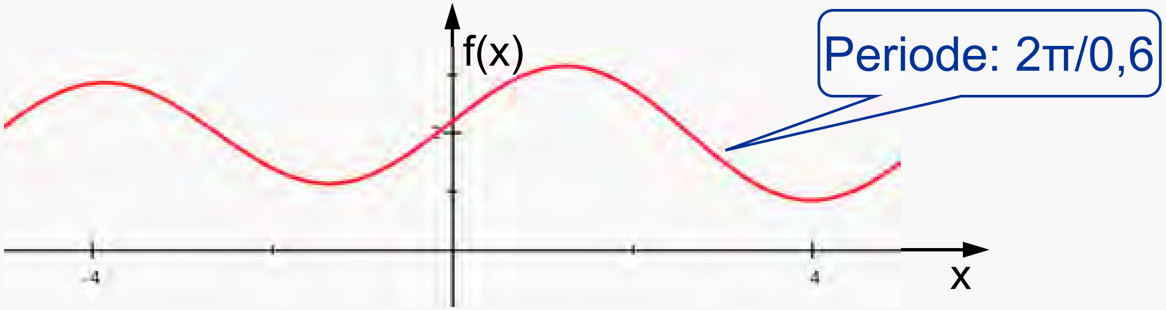
Phase=arctg(Im/Re)

$\arg(c_{-2}) = \pi/2$
$\arg(c_{-1}) = 0$
$\arg(c_0) = 0$
$\arg(c_1) = 0$
$\arg(c_2) = -\pi/2$

Fourier-Transformation

Mit dem bisherigen Fourier-Polynom nicht darstellbar – z.B.:

$f(x) = 2 + 0{,}2 \cdot \cos(0{,}6 \cdot x) + \sin(1{,}2 \cdot x)$



Erfassung von Perioden, die nicht ganzzahlige Teiler $2\pi/k$, $k \in \mathbb{N}$, sondern v. beliebiger Länge $\in \mathbb{R}$ sind, führt zum (nicht-abzählbaren) Kontinuum von Perioden im Intervall $(-\infty , +\infty)$.

(Perioden $\to \infty$ kennzeichnen nichtperiodische Funktionen!)

Umbenennungen – häufig: $k \to u = \int du$; $c_k \to F(u)$, $u \in \mathbb{R}$

Aus den Linienspektren werden kontinuierliche Spektren.

Aus der Fourier-Reihe $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \cdot e^{j \cdot k \cdot x}$ wird ein Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} du$:

Fourier-Transformation

Fourier-Reihendarstellung von f(x):

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left[\, 1/(2\pi) \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-j \cdot k \cdot x}\, dx \,\right]}_{c_k} \cdot e^{j \cdot k \cdot x}$$

Das **Fourier-Integral** erfaßt beliebige Perioden: $\int_{-\pi}^{\pi} dx \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} dx$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\, 1/(2\pi) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{-j \cdot u \cdot x}\, dx \,\right] \cdot e^{j \cdot u \cdot x}\, du$$

$$f(x) = 1/(2\pi) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left[\, \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{-j \cdot u \cdot x}\, dx \,\right]}_{F(u)} \cdot e^{j \cdot u \cdot x}\, du$$

Die Funktion $\boxed{\mathbf{F(u)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f(x) \cdot e^{-j \cdot u \cdot x}\, dx}}$

wird die **Fourier-Transformierte** oder **Spektralfunktion** von f(x) genannt; analog ist f(x) die **Rücktransformierte** zu F(u).

Anmerkungen zu Fourier:

- Fourier-Transformation u. inverse Fourier-Transformation

$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{-j \cdot u \cdot x}\, dx$	$f(x) = 1/(2\pi) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) \cdot e^{j \cdot u \cdot x}\, du$

  unterscheiden sich hauptsächlich im Vorzeichen des Exponenten (und allenfalls in einem konstanten Faktor)

- Notation für die Fourier-Transformation von f(x):

  $F(u) = \mathscr{F}\{ f(x) \}$; $f(x) = \mathscr{F}^{-1}\{ F(u) \}$

  f(x) **o—•** F(u) bilden ein Transformationspaar

  [in der engl. Literatur auch: $f(x) \Leftrightarrow F(u)$]

- Der Faktor ($1/2\pi$) wird in der Literatur uneinheitlich behandelt: Oft wird er der Transformierten zugeordnet, o. beiden Funktionen wird der Faktor $(1/2\pi)^{½}$ vorangestellt.

  Wichtig ist, daß schließlich gilt: $\mathscr{F}^{-1}\{ \mathscr{F}\{ f(x) \} \} = f(x)$

Anmerkungen zu Fourier (2):

- Der Definitionsbereich der Ursprungsfunktion heißt auch **Ortsbereich**, jener d. Transformierten **Frequenzbereich**.
- Mit der Fourier-**Reihe** können **nur periodische**, mit der Fourier-Transformation auch nichtperiodische Funktionen (genauer: mit unendlicher Periode) beschrieben werden

  (vgl.: Nachkommastellen von π aufgefaßt als „Periode“).
- Voraussetzungen für die Existenz von F(u) ist, daß f(x) stückweise stetig und absolut integrierbar ist.

  Die Bedingungen für die Existenz und Berechnung von F(u) waren bis in das 20. Jh. Forschungsgegenstand.
- Spektren geben Auskunft darüber, mit welchen Amplituden und Phasen die einzelnen harmonischen **Schwingungen als „Bausteine“** am Aufbau des Signals f(x) beteiligt sind.

Anmerkungen zu Fourier (3):

- Anschauliche Analogie: Die Fourier-Transformation als „mathematisches **Prisma**“, das die frequenzabhängigen Bestandteile einer einheitlichen Erscheinung erkennbar macht (Licht / math. Funktion).
- Die komplexe Schreibweise erlaubt die Anwendung auf beliebige **komplexe Funktionen** ($f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$)
- In der Regel liegen die zu approximierenden Funktionen nicht als Funktionen, sondern als **gemessene** Wertepaare vor; die Fourier-Koeffizienten werden dann numerisch näherungsweise daraus ermittelt.
- Die Fourier-Transformierten reeller, **gerader** Funktionen [$f(-x) = f(x)$] sind auch **reell** und **gerade** (nur cos-Anteile).

  Die Fourier-Transformierten reeller **ungerader** Funktionen [$f(-x) =-f(x)$] sind **imaginär** u. **ungerade** (nur sin-Anteile).

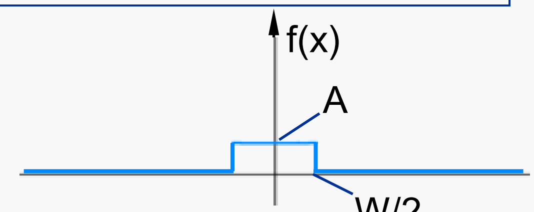
Fourier-Transformation

$\int e^{ax}\,dx = (1/a)\cdot e^{ax}$

$e^{j\varphi} - e^{-j\varphi} = 2\cdot j\cdot \sin\varphi$

Beispiele reeller, gerader Funktionen:

- Rechteck-Funktion: $f(x)=\begin{cases} A & \text{für } |x|\le W/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

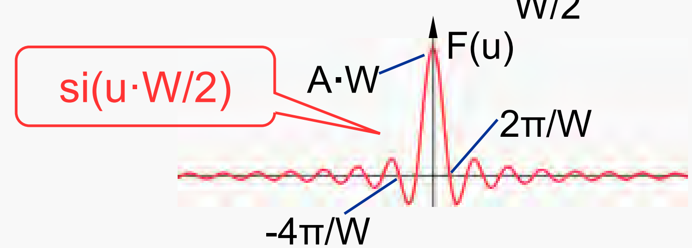


$$F(u) = \mathscr{F}\{\,\mathrm{rect}(x)\,\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot e^{-j\cdot u\cdot x}dx$$

$$= [A/(-j\cdot u)]\cdot[e^{-juW/2} - e^{juW/2}]$$

$$= A\cdot 2\cdot j\cdot \sin(u\cdot W/2)/(j\cdot u)$$

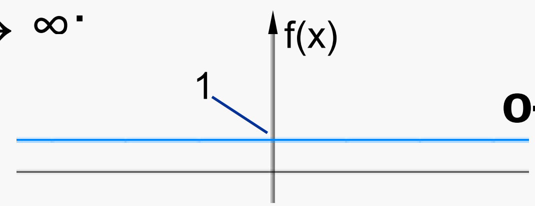
$$= A\cdot W\cdot \sin(u\cdot W/2)/(u\cdot W/2)$$



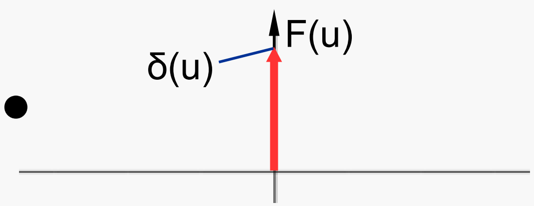
- Daraus, für A=1, W → ∞:

  $f(x) = 1$

  $F(u) = \delta(x)$



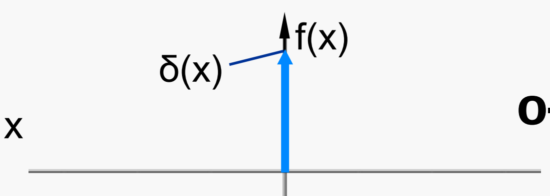
o—●



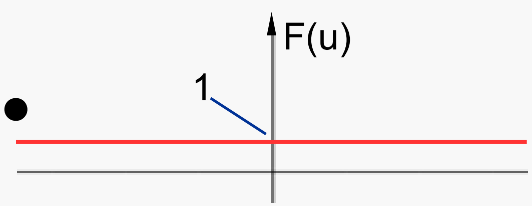
- $f(x) = \delta(x)$

  $F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\cdot e^{-j\cdot u\cdot x}$

  Siebeigenschaft $= [e^{-j\cdot u\cdot x}]_{x=0} = e^0 = 1$



o—●



Fourier-Transformation

Anmerkungen zu Fourier (4):

- **Reziprozität** zw. den Perioden der Transformationspaare:

  Schnelle Veränderungen im Ortsbereich entsprechen langsamen im Frequenzbereich und umgekehrt.

- Funktionen, deren Transformierte außerhalb eines Intervalls $[-u_{max}, u_{max}]$ verschwinden, heißen bandbegrenzt.

  Bandbegrenzte Funktionen sind immer im Bereich $(-\infty, +\infty)$ definiert; umgekehrt sind Funktionen mit endlichem Definitionsbereich niemals bandbegrenzt.

- Eine Konsequenz der entgegengesetzten Exponenten-Vorzeichen in d. Hin- u. d. Rücktransformation ist, daß die Fourier-Trf., angewandt auf eine Fourier-Transformierte, die Ausgangsfunktion gespiegelt um die y-Achse ergibt die **Symmetrie-Eigenschaft** der Fourier-Transformation:

$$f(x) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; F(u) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{F(x)} \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \mathbf{f(-u)}$$

Fourier-Transformation

- $f(x) \;\; = \delta(x - x_0)$

  $F(u) \;\; = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) \cdot e^{-j \cdot u \cdot x} \, dx$

  $\;\;\;\;\;\;\;\;\; = [e^{-j \cdot u \cdot x}]_{x=x0} \;=\; e^{-j \cdot u \cdot x0} \;=\; e^{0} \cdot e^{-j \cdot u \cdot x0}$

  Siebeigenschaft

  $\mathcal{F}\{\,\delta(x)\,\}$

  Symmetrie-Eigenschaft

- Ergebnis läßt sich auf bel. Funktionen f(x) übertragen: (*)

  $f(x-\alpha) \;\; \circ\!\!-\!\!\bullet \;\; F(u) \cdot e^{-j \cdot u \cdot \alpha}$ bzw. $F(u-\alpha) \;\; \bullet\!\!-\!\!\circ \;\; f(x) \cdot e^{j \cdot x \cdot \alpha}$

- Fourier-Transformierte eines (eindim.) Faltungsintegrals:

$$\mathcal{F}\{\, f(x) * h(x) \,\} = \int_{-\infty}^{\infty} [\, \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) \cdot h(x-\alpha)\, d\alpha \,] \cdot e^{-j \cdot u \cdot x}\, dx$$

f(α) unabhängig von x

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) \cdot \underbrace{[\, \int_{-\infty}^{\infty} h(x-\alpha) \cdot e^{-j \cdot u \cdot x}\, dx \,]}_{\mathcal{F}\{\, h(x-\alpha) \,\}}\, d\alpha$$

H(u) unabhängig von α

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) \cdot [\, \underbrace{\mathcal{F}\{\, h(x) \,\}}_{H(u)} \cdot e^{-j \cdot u \cdot \alpha} \,]\, d\alpha \;=\; H(u) \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) \cdot e^{-j \cdot u \cdot \alpha}\, d\alpha}_{\mathcal{F}\{\, f(\alpha) \,\}}$$

$$= \; H(u) \cdot F(u)$$

(*) Hier ohne Herleitung

Anmerkungen zu Fourier (5):

Der Faltung im Ortsbereich entspricht die Multiplikation im Frequenzbereich. **Faltungssatz** (1. Teil bzw. 1. Hälfte):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) \cdot h(x-\alpha)\, d\alpha = \boxed{f(x) * h(x) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; F(u) \cdot H(u)}$$

d.h., übertragen auf (1D-/2D-) Maskenoperationen:

$$f(x) * h(x) = \mathscr{F}^{-1}\{\, \mathscr{F}\{ f(x) \} \cdot \mathscr{F}\{ h(x) \} \,\}$$

Es führt zum gleichen Ergebnis, ob man Masken- und Bildelemente miteinander multipliziert und aufsummiert oder

- Bild und Maske in den Frequenzbereich transformiert,
- d.Transformierten elementweise miteinander multipliziert
- das Ergebnis in den Ortsbereich zurücktransformiert.

Entsprechend hergeleitet, der 2. Teil des Faltungssatzes:

$$\boxed{f(x) \cdot h(x) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; F(u) * H(u)}$$