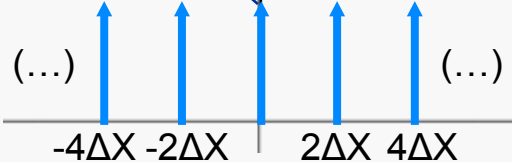


- Abtastung stetiger Funktion $f(x)$, $-\infty < x < +\infty$, darstellbar als Multiplikation von $f(x)$ mit äquidistanter Impulsfolge („Dirac-Kamm“, engl. *impulse train/comb*) \Rightarrow Punktquellen! Impulsfolge als unendliche Reihe äquidistanter Dirac-Deltas in bel. (kurzen) Abständen ΔX (=Periode):

$$s_{\Delta X}(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x - k \cdot \Delta X) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x/\Delta X - k), \quad k \in \mathbb{Z} \quad (\dots)$$


Integration liefert Werte diskre. Abtastung (Siebeigensch.):
 $f(k \cdot \Delta X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \delta(x/\Delta X - k) dx, \quad k = \dots -2, -1, 0, 1, 2 \dots$

- Absicht: Untersuchung der math. Beziehung zwischen d. Fourier-Transformierten einer stetigen Funktion $\mathcal{F} \{ f(x) \}$ und der ihrer diskreten Abtastung $\mathcal{F} \{ f_D(x) \}$ – Vorgehen: Impulsfolge erst als \mathcal{F} -Reihe, dann als \mathcal{F} -Transformierte:

$$s_{\Delta X}(x) = \beta \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\alpha \cdot x - k), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Fourier-Transformation

- \mathcal{F} -Reihenentwicklung der (periodischen) Funktion $s_{\Delta X}(x)$, ausgehend von Impulsfolge $s_{\Delta X}(t)$ mit Periode $\Delta X=2\pi$ in t (Skalierung der x -Achse):

$$s_{\Delta X}(t) = \beta \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\alpha \cdot x - k) = \beta \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \cdot e^{j \cdot k \cdot t}, \quad \text{mit } t = \alpha \cdot x$$

c_k aus dem Integral über eine Periode ($k=0$) $[-\pi, +\pi]$:

$$c_k = (1/2\pi) \int_{t=-\pi}^{+\pi} s_{\Delta X}(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot t} dt \quad \boxed{t=\pi \Leftrightarrow x=\pi/\alpha}$$

$$= (1/2\pi) \int_{x=-\pi/\alpha}^{+\pi/\alpha} \beta \cdot \delta(\alpha \cdot x - k) \cdot e^{-j \cdot k \cdot (\alpha \cdot x)} d(\alpha \cdot x) \quad \boxed{d(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot dx}$$

$$= (\alpha \cdot \beta / 2\pi) \int_{-\pi/\alpha}^{+\pi/\alpha} \beta \cdot \delta(\alpha \cdot x - k) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \alpha \cdot x} dx = (\alpha \cdot \beta / 2\pi) \cdot \underbrace{[e^{-j \cdot k \cdot \alpha \cdot x}]_{x=0}}_{=e^0=1}$$

$$\text{Impulsfolge als Fourier-Reihe: } s_{\Delta X}(x) = (\alpha \cdot \beta^2 / 2\pi) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j \cdot k \cdot \alpha \cdot x}$$

- \mathcal{F} -Transformierte d. Impulsfolge $s_{\Delta X}(x) = (\alpha \cdot \beta^2 / 2\pi) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j \cdot k \cdot \alpha \cdot x}$

$$\begin{aligned} S_{\Delta X}(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s_{\Delta X}(x) \cdot e^{-j \cdot u \cdot x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha \cdot \beta^2 / 2\pi) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j \cdot k \cdot \alpha \cdot x} \cdot e^{-j \cdot u \cdot x} dx \\ &= (\alpha \cdot \beta^2 / 2\pi) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j \cdot k \cdot \alpha \cdot x} \cdot e^{-j \cdot u \cdot x} dx \\ &= (\alpha \cdot \beta^2 / 2\pi) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F} \{ e^{j \cdot k \cdot \alpha \cdot x} \} = (\alpha \cdot \beta^2 / 2\pi) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(u - k \cdot \alpha) \end{aligned}$$

Bereits bekannt: $\mathcal{F} \{ \delta(x - x_0) \} = e^{-j \cdot x_0 \cdot u}$

Symmetrie-Eigenschaft [$f(x) \circ \bullet F(u) \Leftrightarrow F(x) \circ \bullet f(-u)$]

$$\mathcal{F} \{ e^{-j \cdot x_0 \cdot x} \} = \delta(-u - x_0) = \delta(u + x_0) = \delta(u - (-x_0))$$

Für $-x_0 = k \cdot \alpha$ folgt: $\mathcal{F} \{ e^{j \cdot k \cdot \alpha \cdot x} \} = \delta(u - k \cdot \alpha)$

- \mathcal{F} -Transformierte der ΔX -äquidistanten Impulsfolge $s_{\Delta X}(x)$

$$s_{\Delta X}(x) = \beta \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\alpha \cdot x - k)$$

$$S_{\Delta X}(u) = (\alpha \cdot \beta^2 / 2\pi) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(u - k \cdot \alpha)$$

Mit $\alpha = 1/\Delta X$ (Eingangannahme), $\beta = (2\pi)^{1/2}$ (Normierung):

$$S_{\Delta X}(u) = (1/\Delta X) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(u - k/\Delta X) = \mathcal{F} \{ s_{\Delta X}(x) \}$$

⇒ D.h.: Die Transformierte einer Impulsfolge im Ortsbereich ist eine Impulsfolge im Frequenzbereich.

Hat die Impulsfolge die Periode ΔX , so beträgt die Periode ihrer Transformierten $1/\Delta X$.

(Reziprozität: Schnelle Veränderungen im Ortsbereich ⇔ langsame Veränderungen im Frequenzbereich und v.v..)

Übertragung der Erkenntnisse auf die Signalabtastung:

- Der Multiplikation einer Signalfunktion $f(x)$ mit der Impulsfolge $s_{\Delta X}(x)$ im Ortsbereich entspricht eine Faltung von $F(u)$ mit $S_{\Delta X}(u)$ im Frequenzbereich (Faltungssatz/2.):

$$F_D(u) = \mathcal{F} \{ f(x) \cdot s_{\Delta X}(x) \} = F(u) * S_{\Delta X}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) \cdot S_{\Delta X}(u - \alpha) d\alpha$$

$$= (1/\Delta X) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) \cdot \delta(u - k/\Delta X - \alpha) d\alpha$$

Siebeigenschaft

stetige Fkt.

diskrete Fkt.

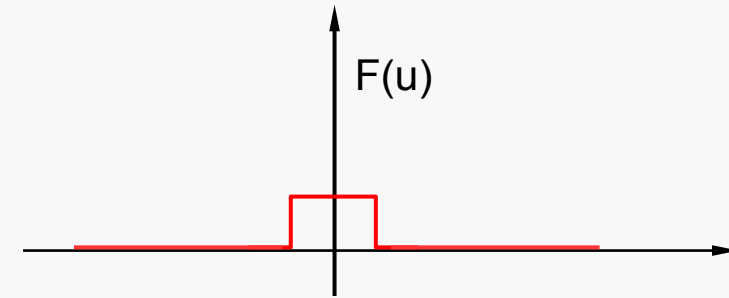
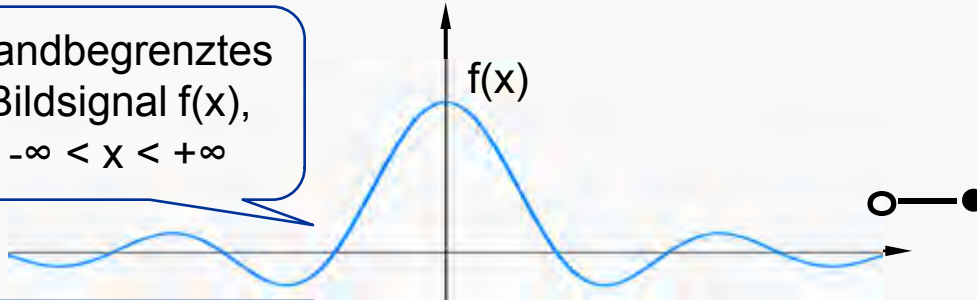
$$= (1/\Delta X) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(u - k/\Delta X) = \mathcal{F} \{ f_D(x) \}$$

⇒ D.h.: Die \mathcal{F} -Transformierte $F_D(u)$ einer Signalfunktion $f(x)$, die mit äquidistanten Impulsen in Abständen von ΔX zu $f_D(x)$ abgetastet wurde, besteht aus einer unendlichen, periodischen Folge von Kopien der \mathcal{F} -Transformierten $F(u)$ der Originalfunktion im Abstand $1/\Delta X$ voneinander.

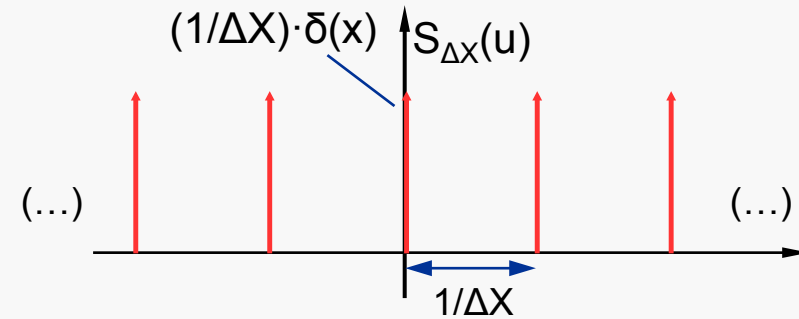
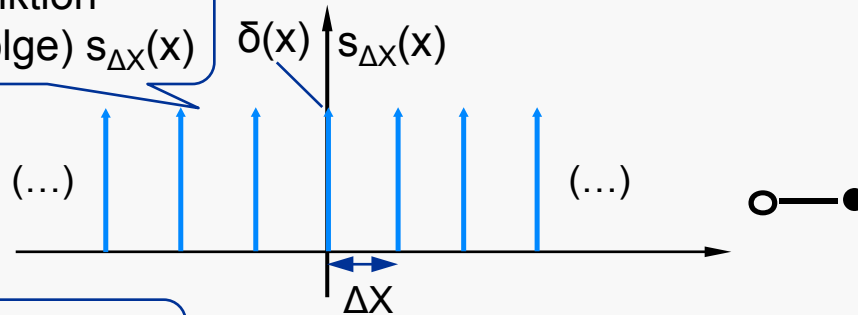
Fourier-Transformation

- Visualisierte Zusammenfassung (qualitative Darstellung):

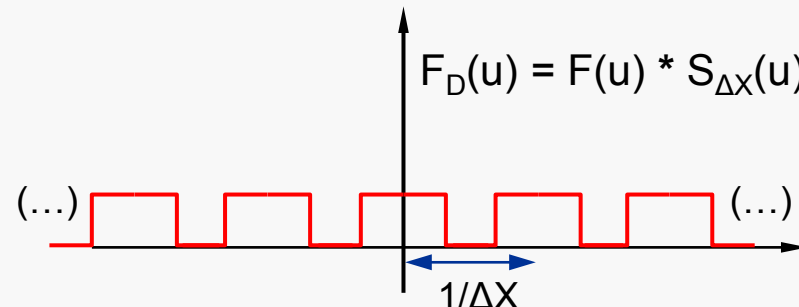
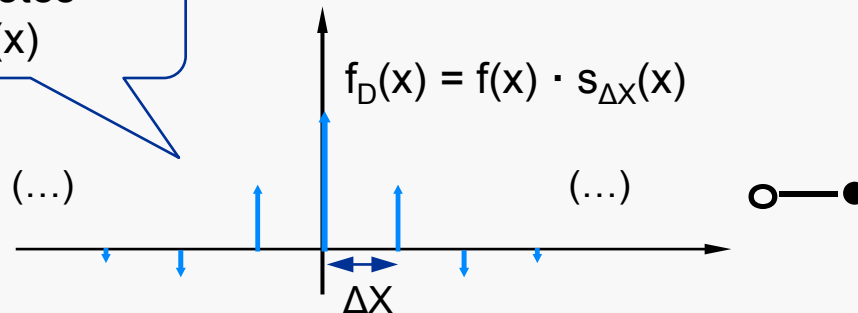
Bandbegrenzte
Bildsignal $f(x)$,
 $-\infty < x < +\infty$



Abtastfunktion
(Impulsfolge) $s_{\Delta X}(x)$



Abgetastetes
Signal $f_D(x)$



Zusammenfassung:

- Die Fourier-Transformierte einer Impulsfolge $s_{\Delta X}(x)$ im Ortsbereich mit der Periode ΔX ist eine Impulsfolge $S_{\Delta X}(u)$ im Frequenzbereich mit der Periode $1/\Delta X$.
- Die diskrete Abtastung $f_D(x)$ einer stetigen Funktion $f(x)$ läßt sich darstellen als die Multiplikation von $f(x)$ mit einer Impulsfolge $s_{\Delta X}(x)$, d.h.: $f_D(x) = f(x) \cdot s_{\Delta X}(x)$
- Die Fourier-Transformierte der diskreten Abtastung $f_D(x)$ einer stetigen Funktion $f(x)$ ist eine stetige Funktion $F_D(u)$ (eine unendliche Summe um $1/\Delta X$ versetzter $F(u)$ -Kopien)
- Bei ausreichend großem $1/\Delta X$ (kleinem ΔX) läßt sich aufgrund der Bandbegrenzung eine einzelne Periode von $F_D(u)$, $-1/(2\Delta X) \leq u \leq 1/(2\Delta X)$ [d.h.: $F(u)$] extrahieren und daraus $f(x) = \mathcal{F}^{-1} \{ F(u) \}$ ermitteln: Aus dem abgetasteten Signal wird das kontinuierliche Originalsignal gewonnen.

- Übergang zur **diskreten** Fourier-Trf. **DFT**:
Ausgehend von einem Satz von M Proben einer stetigen Funktion $f(x)$ erzeugt DFT einen Satz von M Proben ihrer Fourier-Transformierten $F(u)$. Ihre Inverse, **IDFT**, liefert, umgekehrt, aus M $F(u)$ -Proben, die Werte von $f(x)$.

- Transformationspaar der **diskreten** Fourier-Trf. **DFT**:

$$F_D(u) = \sum_{x=0}^{M-1} f_D(x) \cdot e^{-j \cdot u \cdot x} \quad f_D(x) = 1/M \cdot \sum_{u=0}^{M-1} F_D(u) \cdot e^{j \cdot u \cdot x}$$

mit $u=0, 1, \dots, M-1$ und $x=0, 1, \dots, M-1$;

$f_D(x)$ ist die Folge der Abtastwerte einer stetigen Funktion $f(x)$, $-\infty < x < +\infty$.

- Anwendung in der Bildverarbeitung durch Annahme unendlicher Periodizität der endlichen Anzahl M ($M \neq \infty$) verfügbarer diskreter Abtastwerte $f_D(x)$, $x \in \mathbb{Z}$

Anmerkungen zu Fourier (6):

DFT: Summe gewichteter Kopien der Eulerschen Funktion bei angenommener Periodizität zugrunde liegender $f(x)$; d.h.:

- **DFT-Transformierte** beliebiger Funktionen (Wertepaare) sind immer **unendlich und periodisch**.
- Anders als $\mathcal{F}\{f(x)\}$ ist die DFT und ihre Inverse für beliebige Funktionen **immer existent u. berechenbar**.
- Für die DFT gelten dieselben Regeln wie für die allg. $\mathcal{F}\{\}$; Faktor $1/M$ kann auch $\mathcal{F}\{\}$ vorgesetzt werden (vgl. $1/2\pi$). Daher wird i.a. dieselbe Notation verwendet: $\mathcal{F}\{\}$, $F(u)$

Wichtiger Spezialfall:

- **Periodische, bandbegrenzte** Fktn [d.h.: definiert $(-\infty, +\infty)$] können aus Abtastwerten **verlustfrei** rekonstruiert werden
Voraussetzung hierfür ist eine ausreichende Abtastrate (d.h.: Dichte der Abtastwerte).

- Berechnung des Fourier-Polynoms $g_n(x)$ einer gesuchten periodischen Funktion $y=f(x)$ aus n äquidistanten x -Werten und den dazugehörigen y -Werten einer Periode: bei geradem n

$$g_n(x) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{k=1}^m \{A_k \cdot \cos(k \cdot x) + B_k \cdot \sin(k \cdot x)\} + A_{n/2} \cdot \cos(x \cdot n/2)$$

$m \in \mathbb{N}$ Vielfache der Grundfrequenz (Teiler d. Periode 2π):

$m = (n-2)/2$ für gerades n ; $m = (n-1)/2$ für ungerades n

$$\frac{1}{2} A_0 = (1/n) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_i$$

$$A_{n/2} = (1/n) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \cdot y_i$$

entfällt bei ungeradem n

$$A_k = (2/n) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot \cos(k \cdot x_i)$$

$$B_k = (2/n) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot \sin(k \cdot x_i)$$

Die Näherung minimiert die Summe der Abweichungsquadrate einer unbekanntes $f(x)$ und $g_n(x)$. (*)

(*) Hier ohne Herleitung

Beispiel: Rekonstruktion von $f(x) = 2 + 0,2 \cdot \cos(2x)$
aus 4 äquidistanten Funktionswerten (Abtastwerten)

$$g_n(x) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{k=1}^m \{ A_k \cdot \cos(k \cdot x) + B_k \cdot \sin(k \cdot x) \} + A_{n/2} \cdot \cos(x \cdot n/2)$$

[$n=4$ (gerade); $m=(n-2)/2=1$]

$$\frac{1}{2} A_0 = (1/n) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_i = (1/4) \cdot [2,2 + 1,8 + 2,2 + 1,8] = 2$$

$$A_1 = (2/n) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot \cos(1 \cdot x_i) = (2/4) \cdot [2,2 \cdot \cos(0) + 1,8 \cdot \cos(\pi/2) + 2,2 \cdot \cos(\pi) + 1,8 \cdot \cos(3\pi/2)] = 0$$

$$A_2 = (1/n) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \cdot y_i = (1/4) \cdot [(-1)^0 \cdot 2,2 + (-1)^1 \cdot 1,8 + (-1)^2 \cdot 2,2 + (-1)^3 \cdot 1,8] = 0,2$$

$$B_1 = (2/n) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot \sin(1 \cdot x_i) = (2/4) \cdot [2,2 \cdot \sin(0) + 1,8 \cdot \sin(\pi/2) + 2,2 \cdot \sin(\pi) + 1,8 \cdot \sin(3\pi/2)] = 0$$

$$\Rightarrow g_4(x) = 2 + 0,2 \cdot \cos(2x)$$

d.h.: $f(x)$ ist rekonstruiert!

x_i	$\cos(2x_i)$	$y_i=f(x_i)$
0	1	2,2
$\pi/2$	-1	1,8
π	1	2,2
$3\pi/2$	-1	1,8

Fourier-Transformation

Beispiel: Rekonstruktion v. $f(x)=2+0,2 \cdot \cos(x)+\sin(2x)$
aus 6 äquidistanten Funktionswerten (Abtastwerten)

x_i	$\cos(x_i)$	$\sin(2x_i)$	$y_i=f(x_i)$
0	1	0	2,2
$\pi/3$	0,5	w	2,1+w
$2\pi/3$	-0,5	-w	1,9-w
π	-1	0	1,8
$4\pi/3$	-0,5	w	1,9+w
$5\pi/3$	0,5	-w	2,1-w

$$g_n(x) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{k=1}^m \{ A_k \cdot \cos(k \cdot x) + B_k \cdot \sin(k \cdot x) \} + A_{n/2} \cdot \cos(x \cdot n/2)$$

[$n=6$ (gerade); $m=(n-2)/2=2$; $\sin(2\pi/3)=-\sin(4\pi/3)=\sqrt{3}/2=w$]

$$\frac{1}{2}A_0 = (1/n) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_i = (1/6) \cdot [2,2+(2,1+w)+(1,9-w)+1,8+(1,9+w)+(2,1-w)]$$

$$= 2$$

$$A_1 = (2/n) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot \cos(1 \cdot x_i) = (2/6) \cdot [2,2 \cdot \cos(0) + (2,1+w) \cdot \cos(\pi/3) + (1,9-w) \cdot \cos(2\pi/3) + 1,8 \cdot \cos(\pi) + (1,9+w) \cdot \cos(4\pi/3) + (2,1-w) \cdot \cos(5\pi/3)]$$

$$= 0,2$$

$$A_2 = (2/n) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot \cos(2 \cdot x_i) = (2/6) \cdot [2,2 \cdot \cos(0) + (2,1+w) \cdot \cos(2\pi/3) + (1,9-w) \cdot \cos(4\pi/3) + 1,8 \cdot \cos(6\pi/3) + (1,9+w) \cdot \cos(8\pi/3) + (2,1-w) \cdot \cos(10\pi/3)]$$

$$= 0$$

$$A_3 = (1/n) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \cdot y_i = (1/6) \cdot [(-1)^0 \cdot 2,2 + (-1)^1 \cdot (2,1+w) + (-1)^2 \cdot (1,9-w) + (-1)^3 \cdot (1,8) + (-1)^4 \cdot (1,9+w) + (-1)^5 \cdot (2,1-w)] = 0$$

Fourier-Transformation

Beispiel: (Forts.) $f(x)=2+0,2 \cdot \cos(x)+\sin(2 \cdot x)$

aus 6 äquidistanten Funktionswerten (Abtastwerten)

$$g_n(x) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{k=1}^m \{ A_k \cdot \cos(k \cdot x) + B_k \cdot \sin(k \cdot x) \} + A_{n/2} \cdot \cos(x \cdot n/2)$$

$$g_6(x) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{k=1}^2 \{ A_k \cdot \cos(k \cdot x) + B_k \cdot \sin(k \cdot x) \} + A_3 \cdot \cos(3x)$$

x_i	$\cos(x_i)$	$\sin(2x_i)$	$y_i=f(x_i)$
0	1	0	2,2
$\pi/3$	0,5	w	2,1+w
$2\pi/3$	-0,5	-w	1,9-w
π	-1	0	1,8
$4\pi/3$	-0,5	w	1,9+w
$5\pi/3$	0,5	-w	2,1-w

$$B_1 = (2/n) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot \sin(1 \cdot x_i) = (2/6) \cdot [2,2 \cdot \sin(0) + (2,1+w) \cdot \sin(\pi/3) + (1,9-w) \cdot \sin(2\pi/3) + 1,8 \cdot \sin(\pi) + (1,9+w) \cdot \sin(4\pi/3) + (2,1-w) \cdot \sin(5\pi/3)]$$

$$= 0$$

$$B_2 = (2/n) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot \sin(2 \cdot x_i) = (2/6) \cdot [2,2 \cdot \sin(0) + (2,1+w) \cdot \sin(2\pi/3) + (1,9-w) \cdot \sin(4\pi/3) + 1,8 \cdot \sin(6\pi/3) + (1,9+w) \cdot \sin(8\pi/3) + (2,1-w) \cdot \sin(10\pi/3)]$$

$$= 1$$

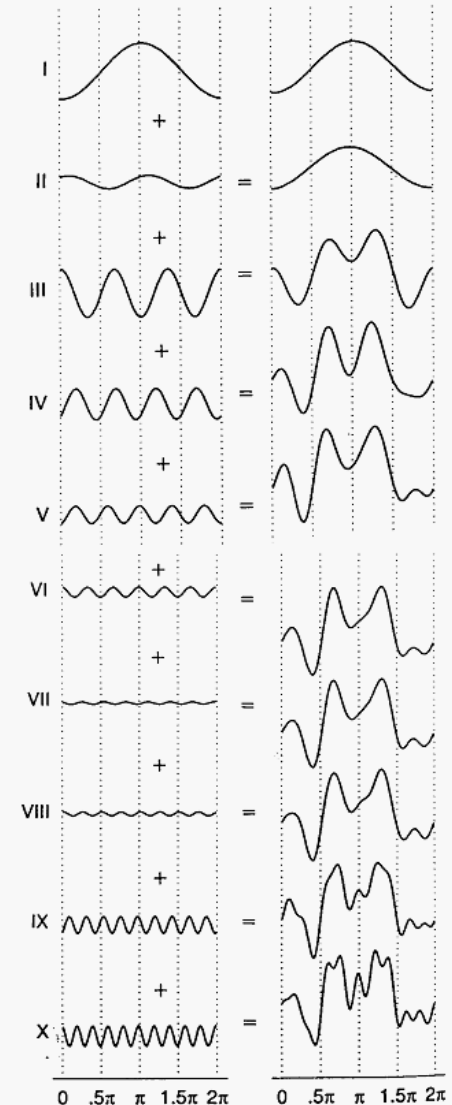
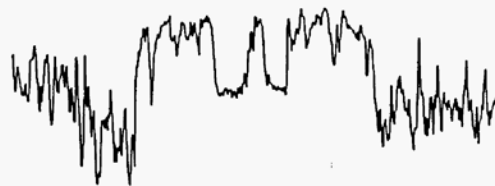
$$\Rightarrow g_6(x) = 2 + 0,2 \cdot \cos(x) + 1 \cdot \sin(2 \cdot x)$$

d.h.: $f(x)$ ist rekonstruiert!

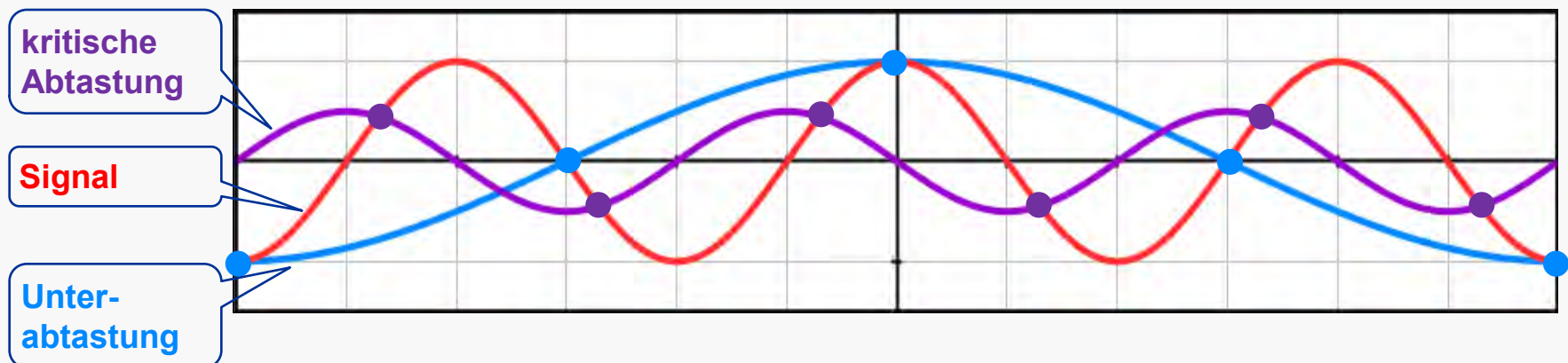
Operationen im Frequenzbereich

Abtasttheorem (engl. *sampling theorem*)
(H.Nyquist 1928; Beweis: C.E.Shannon 1949):

Ein periodisches Signal läßt sich **aus einer endlichen Anzahl von Abtastwerten exakt** (d.h.: fehlerfrei) **rekonstruieren**. Dabei dürfen die Abtastpunkte nicht weiter auseinanderliegen als eine halbe Periode der höchsten Frequenz, die im Signal enthalten ist. Diese Grenzfrequenz wird „Nyquist-Frequenz“ genannt.



- Abtastung mit der „Nyquist-Frequenz“ ermöglicht Signal-Rekonstruktion nur, wenn Minima / Maxima erfaßt werden



- Abtastung unterhalb der Nyquist-Frequenz kann Abtastwerte ergeben, die auf eine niedrigere Frequenz schließen lassen. Diese „Maskierung“ hoher durch niedrige Frequenzen nennt man **Aliasing**.
- Linien, Objektkanten und sich perspektivisch verjüngende Strukturen sind hochfrequente, durch Aliasing gefährdete Bildregionen.

Beispiel: $f(x)=2+0,2\cdot\cos(x)+\sin(2x)$

Versuch einer Rekonstruktion aus 4 äquidistanten Abtastwerten:

$$g_n(x) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{k=1}^m \{ A_k \cdot \cos(k \cdot x) + B_k \cdot \sin(k \cdot x) \} + A_{n/2} \cdot \cos(x \cdot n/2)$$

[$n=4$ (gerade); $m=(n-2)/2=1$; $\sin(\pi/4)=\cos(\pi/4)=1/\sqrt{2} = w$]

$$\frac{1}{2}A_0 = (1/n) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_i = (1/4) \cdot [(3+0,2w)+(1-0,2w)+(3-0,2w + 1+0,2w)] = 2$$

x_i	$\cos(x_i)$	$\sin(2x_i)$	$y_i=f(x_i)$
$\pi/4$	w	1	$3+0,2w$
$3\pi/4$	$-w$	-1	$1-0,2w$
$5\pi/4$	$-w$	1	$3-0,2w$
$7\pi/4$	w	-1	$1+0,2w$

$$A_1 = (2/n) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot \cos(1 \cdot x_i) = (2/4) \cdot [(3+0,2w) \cdot \cos(\pi/4) + (1-0,2w) \cdot \cos(3\pi/4) + (3-0,2w) \cdot \cos(5\pi/4) + (1+0,2w) \cdot \cos(7\pi/4)] = 0,2$$

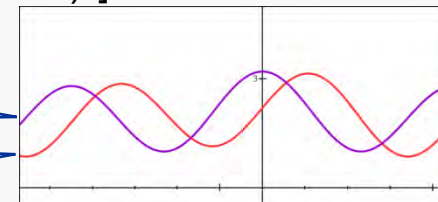
$$A_2 = (1/n) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \cdot y_i = (1/4) \cdot [(-1)^0 \cdot (3+0,2w) + (-1)^1 \cdot (1-0,2w) + (-1)^2 \cdot (3-0,2w) + (-1)^3 \cdot (1+0,2w)] = 1$$

$$B_1 = (2/n) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot \sin(1 \cdot x_i) = (2/4) \cdot [(3+0,2w) \cdot \sin(\pi/4) + (1-0,2w) \cdot \sin(3\pi/4) + (3-0,2w) \cdot \sin(5\pi/4) + (1+0,2w) \cdot \sin(7\pi/4)] = 0$$

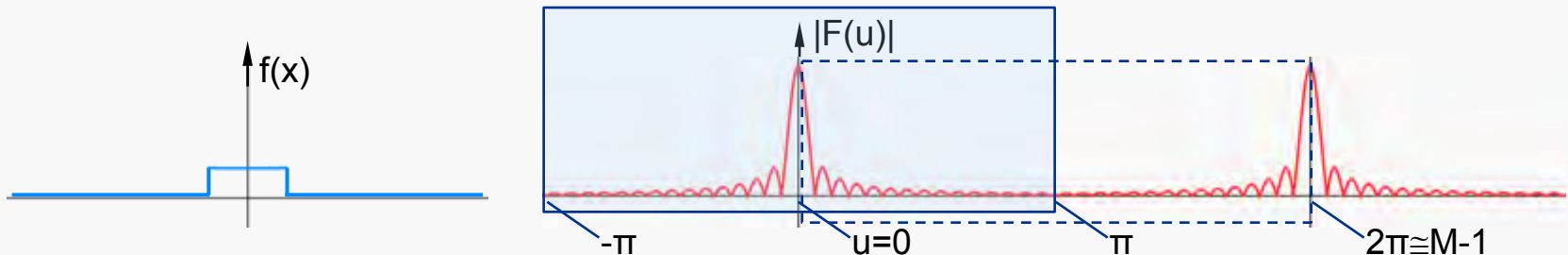
$\Rightarrow g_6(x) = 2 + 0,2 \cdot \cos(x) + \cos(2x) \Rightarrow$ grenzwertig verfehlt!

$2+0,2\cdot\cos(x)+\cos(2x)$

$2+0,2\cdot\cos(x)+\sin(2x)$



- Vor allem der Betrag der DFT bietet sich als effizientes Werkzeug zur Erkennung von **Objekten**, aber auch von niederfrequenten (z.B. Unschärfe) und hochfrequenten (Fabrikationsfehler, Rauschen) **Störungen** in einem Bild.



Zur leichteren Orientierung wird meist die berechnete periodische $F(u)$ im Bereich $-\pi \leq u \leq \pi$ dargestellt, also mit $-M/2 \leq u \leq M/2$ (statt $0 \leq u \leq M-1$), indem die DFT um $-\pi$ (d.h. um $-M/2$) versetzt wird. ($F(0,0)$ liegt in der Mitte.)

Dies kann rechnerisch schon im Ortsbereich, noch vor der Transformation bewerkstelligt werden:

- Verschiebung im Frequenzbereich um $-\pi$ (s.o.) entspricht:
$$F(u-\pi) \quad \bullet \text{---} \circ \quad f(x) \cdot e^{j \cdot x \cdot \pi}, \quad x=0, 1, \dots, M-1$$
$$= f(x) \cdot \left\{ \underbrace{\cos(x \cdot \pi)}_{= (-1)^x} + j \cdot \underbrace{\sin(x \cdot \pi)}_{= 0} \right\}$$
$$= f(x) \cdot (-1)^x$$

Entsprechend: $f(x-M/2, y-N/2) \quad \circ \text{---} \bullet \quad F(u, v) \cdot (-1)^{u+v} \quad (*)$

- Forderung: Einsatz geradzahliger Anzahl v. Abtastwerten, damit auch halbe Perioden ($M/2$ Pixel) ganzzahlig sind.
- Bei Verwendung ausschließlich von Abtastwerten, deren Anzahl eine Zweierpotenz ist, kann die Schnelle Fourier-Trf. (engl. *Fast Fourier Transform*) FFT eingesetzt werden (James Cooley, John W. Tukey, 1965).

Sie reduziert die Rechenzeit von $O(n^2)$ auf $O(n \cdot \log n)$.

[Bei Bildern: $n=M \cdot N$]

(*) Hier ohne Herleitung

- DFT-Erweiterung auf 2D durch Interpretation von Bildzeilen bzw. -Spalten als unabhängig voneinander abgetastete Funktionen mit M bzw. N Werten (Pixeln):

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \cdot e^{-j \cdot (u \cdot x + v \cdot y)}$$

$$(u=0,1,\dots,M-1; \\ v=0,1,\dots,N-1)$$

$$f(x,y) = 1/(M \cdot N) \cdot \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) \cdot e^{j \cdot (u \cdot x + v \cdot y)}$$

$$(x=0,1,\dots,M-1; \\ y=0,1,\dots,N-1)$$

[in der Fachliteratur oft mit $e^{\pm j \cdot 2\pi \cdot (u \cdot x/M + v \cdot y/N)}$ dargestellt]

Häufig genutzte Größen und Darstellungen:

- (Betrags-)Spektrum: $|F(u,v)| = [\text{Re}^2(u,v) + \text{Im}^2(u,v)]^{1/2}$
- Leistungsspektrum: $P(u,v) = |F(u,v)|^2 = \text{Re}^2(u,v) + \text{Im}^2(u,v)$
- Phase: $\varphi(u,v) = \arctg [\text{Im}(u,v) / \text{Re}(u,v)]$

Man beachte die Entsprechung: M bzw. N $\Leftrightarrow 2\pi$

Operationen im Frequenzbereich

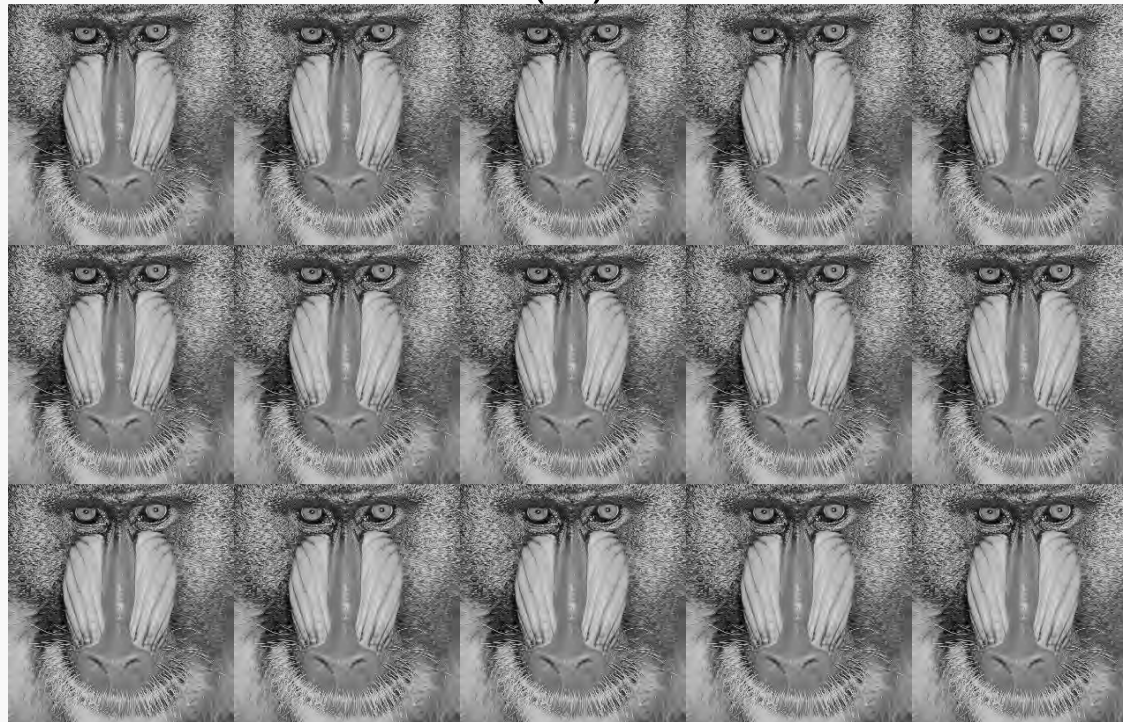
Voraussetzung für d. Anwendbarkeit d. DFT in d. Bildverarbeitung:

Periodizität des Motivs – i.d.R. nicht gegeben

Abhilfe: Bild wird betrachtet als Einzel-Periode eines sich ins Unendliche wiederholenden, kontinuierlichen Musters.

(...)

(...)

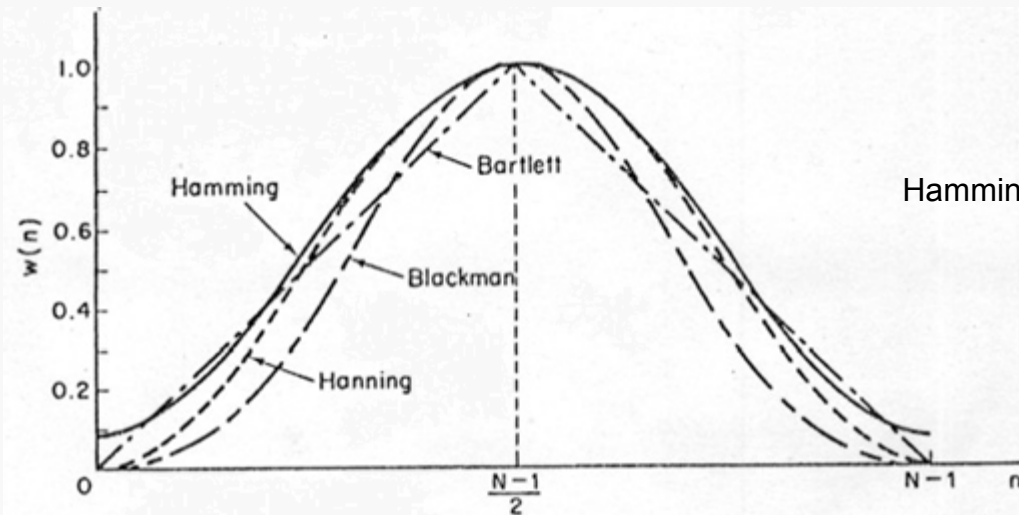


(...)

(...)

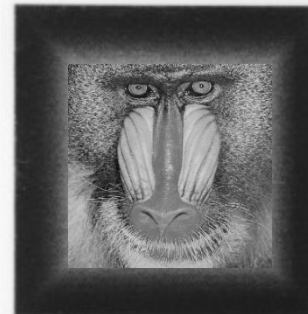
Achtung: „Nahtstellen“ stellen hochfrequente Änderungen dar!

- Vermeidung störender Randeffekte an Bildrändern („Nahtstellen“) durch Umrahmung mit Fensterfunktionen – mehrere Ansätze:

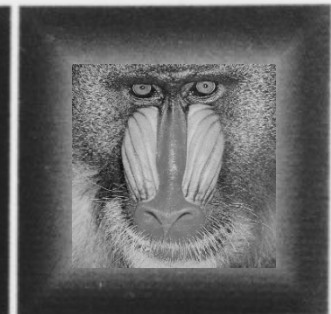


Grafik: W.K.Pratt: „Digital Image Processing“ Wiley 1978

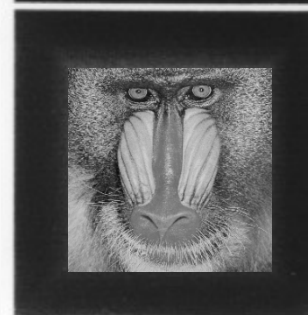
Bartlett



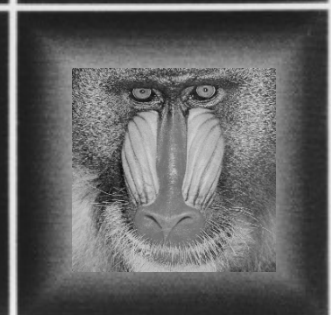
Blackman



Hamming



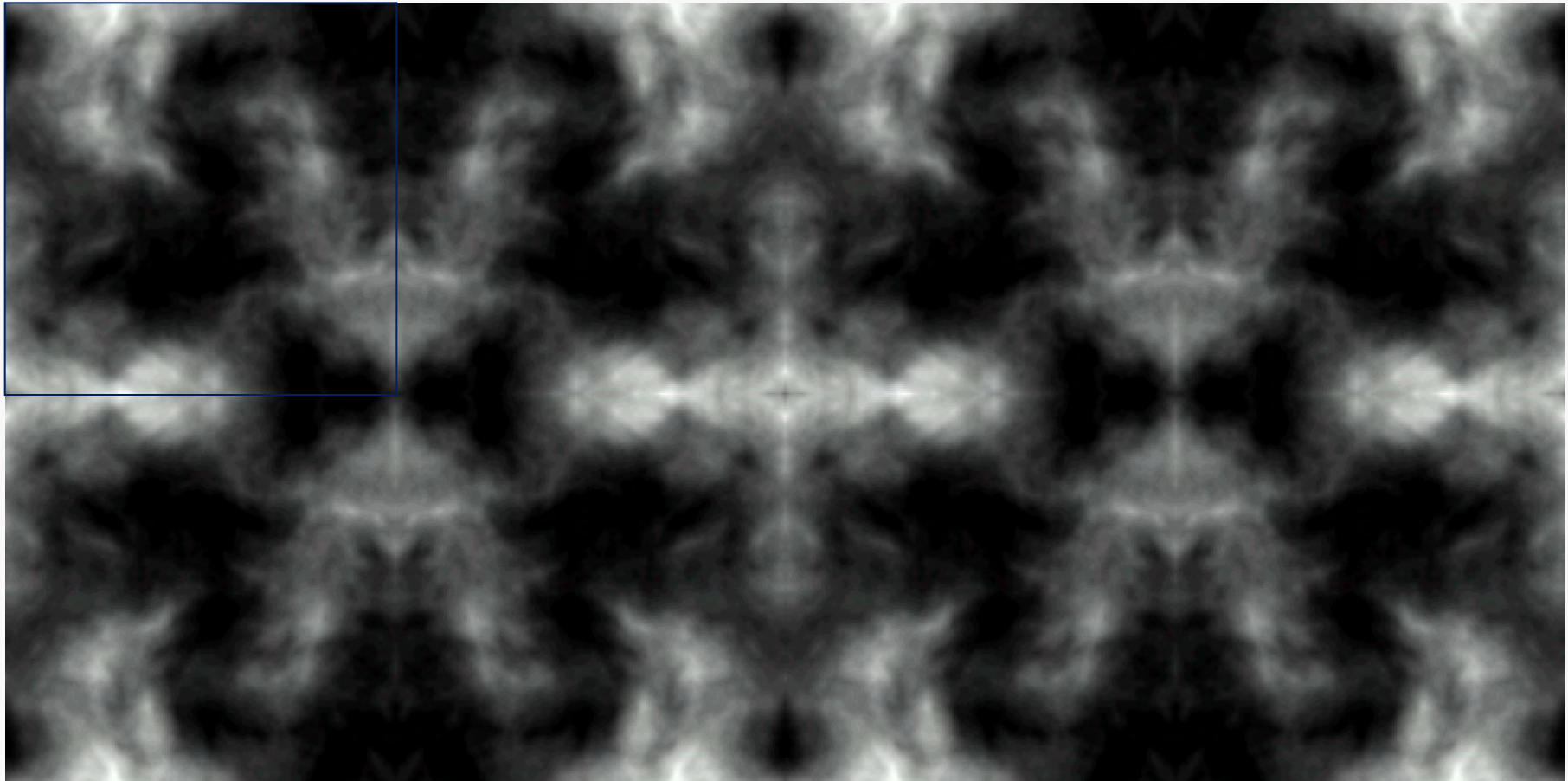
Hanning



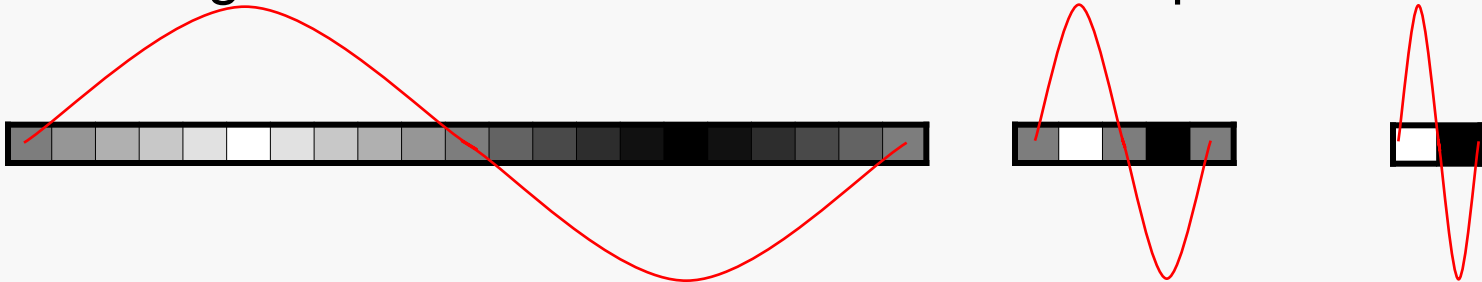
Bild/Montage: A. Christidis 1991

Apropos:

- Je nach Aufgabenstellung (z.B. zur Erzeugung von Himmelkulissen in der Simulationsgrafik), nahtlose Bild-Kontinuen durch Spiegelung an x- und y-Achse:



- Anwendung u. Visualisierung d. DFT in d. Bildverarbeitung wirft Frage nach den im Bild enthaltenen Frequenzen auf:



Zeilen / Spalten digitaler Bilder können (inkl. Gleichanteil) so viele Frequenzen bzw. Perioden wie Pixel enthalten.

- Angenommene Periodizität bedeutet, daß jede M Pixel eine volle Periode (bzw. der Winkel 2π) durchlaufen wird.

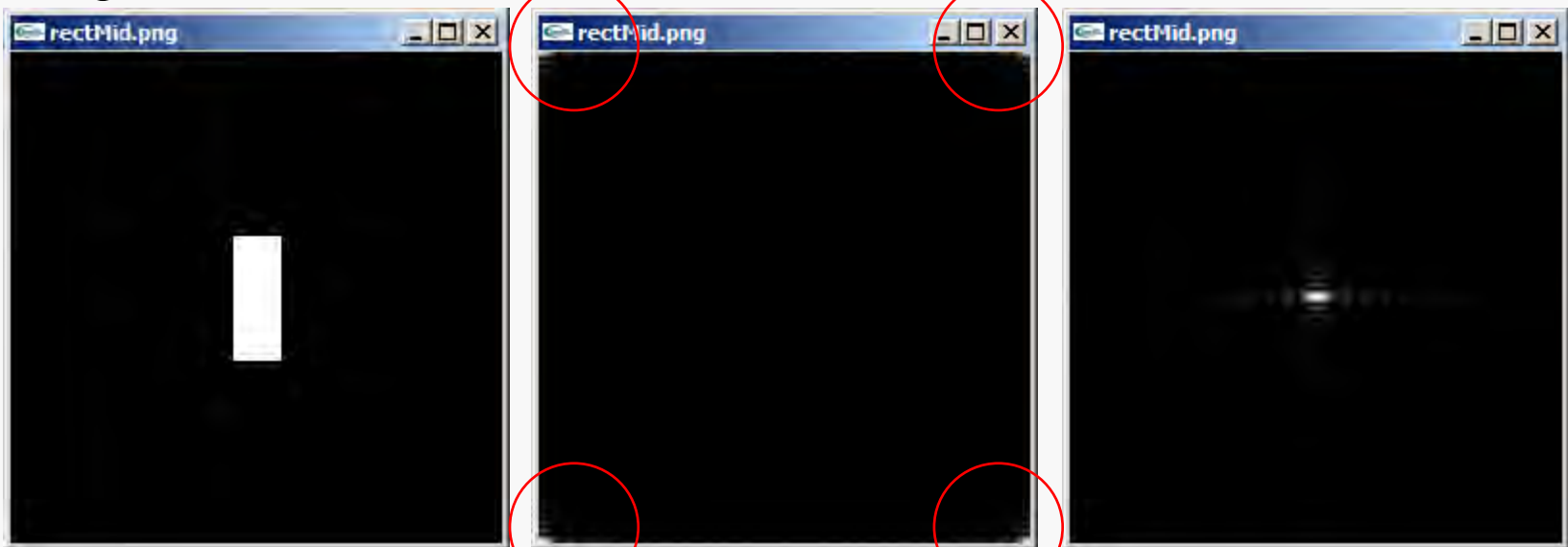
Deshalb ist in der Literatur als Definition weit verbreitet:

$$F(u) = \sum_{x=0}^{M-1} f(x) \cdot e^{-j \cdot u \cdot x \cdot 2\pi/M}, \quad f(x) = 1/M \cdot \sum_{u=0}^{M-1} F(u) \cdot e^{j \cdot u \cdot x \cdot 2\pi/M}$$

[Diese Skalierung des Exponenten erlaubt die Angabe von x- und u-Abschnitten in Pixeln (z.B. M) statt in Winkeln (z.B. 2π).]

Implementierungshinweise:

- Die DFT wird auf monochrome Bilder bzw. auf jeweils eine Farbkomponente angewandt.
- Das um die Bildmitte zentrierte Spektrum von $f(x,y)$ wird durch DFT des Produktes $f(x,y) \cdot (-1)^{x+y}$ und Betragsbildung gewonnen.



Bildmotiv $f(x,y)$

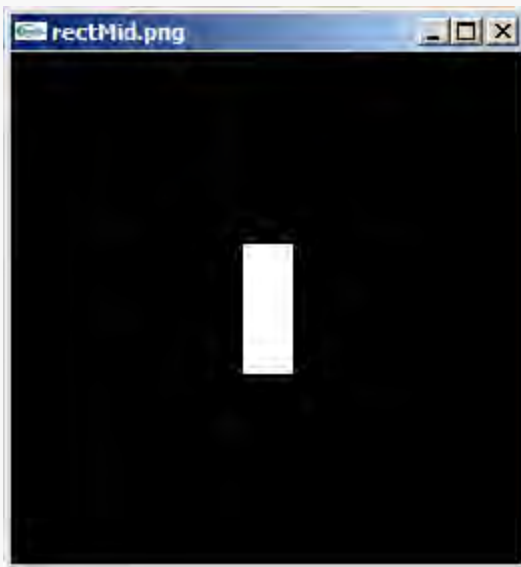
$|F(u,v)|$ nicht zentriert

$|F(u,v)|$ zentriert

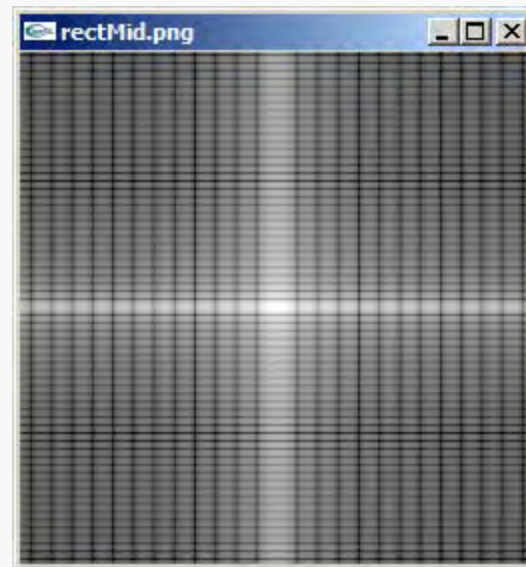
Implementierungshinweise (2):

- Die Dominanz des Gleichanteils läßt die übrigen Werte im visualisierten Spektrum $|F(u,v)|$ i.d.R. zu dunkel erscheinen
Abhilfe: logarithmische Darstellung:

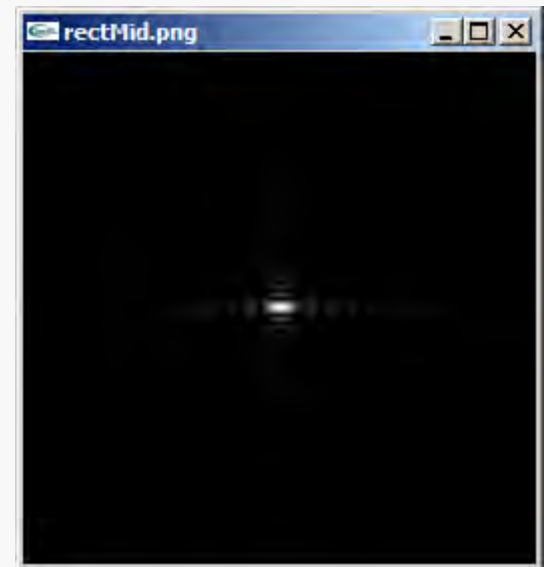
$$G(x,y) = c \cdot \log(1 + |F(u,v)|) , c = \text{const. (wählbar)}$$



Bildmotiv $f(x,y)$



$c \cdot \log(1 + |F(u,v)|)$



$|F(u,v)|$ zentriert

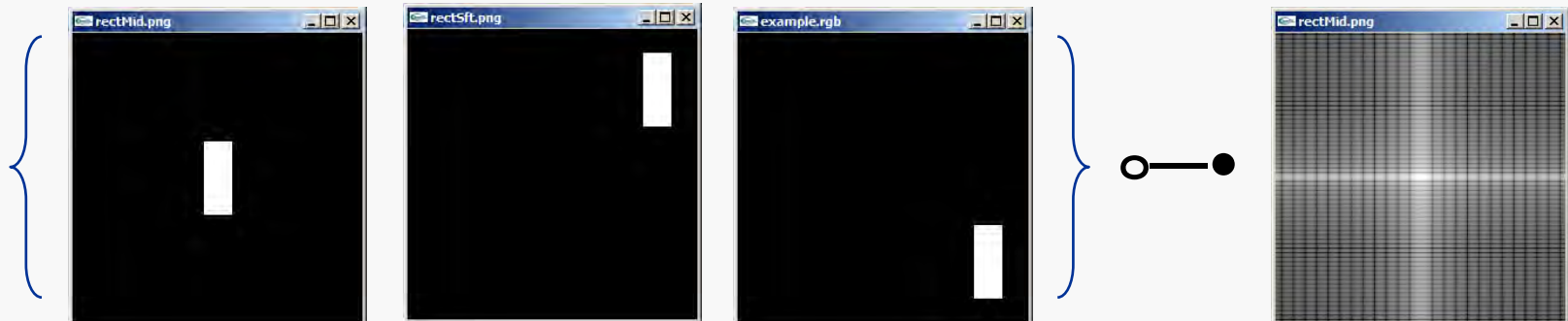
Implementierungshinweise (3):

- Aus $f(x-\alpha) \circ \longrightarrow \bullet F(u) \cdot e^{-j \cdot u \cdot \alpha}$ ergibt sich, daß Verschiebung eines Bildmotivs um α keine Änderung in $|F(u)|$ bewirkt:

$$|e^{-j \cdot u \cdot \alpha}| = [\cos^2(u \cdot \alpha) + \sin^2(u \cdot \alpha)]^{1/2} = 1$$

- Da reellwertige Funktionen symmetrische Fourier-Spektren haben (s.o.), also: $\mathcal{F} \{ f(-x) \} = \mathcal{F} \{ f(x) \}$, folgt daraus, daß Funktionen $f(x)$, $f(x-\alpha)$ und $f(\alpha-x)$ das gleiche Spektrum $|F(u)|$ haben (bei unterschiedlicher Phase).

In Systemen, die Bilder „kopfunter“ speichern (unterste Zeile zuerst), ist daher keine Umspeicherung nötig.



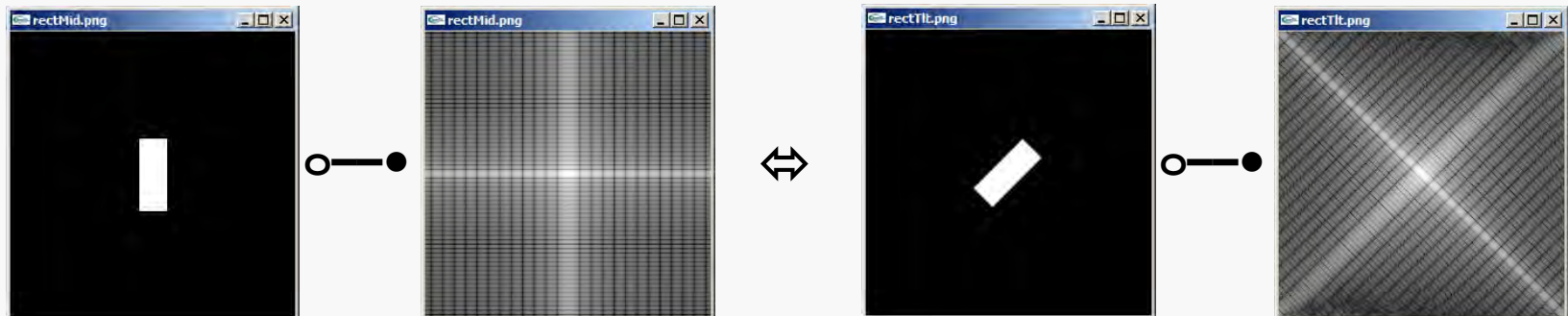
Operationen im Frequenzbereich

Nach erfolgter Implementierung bestätigt sich die Konsequenz einer Bildrotation für das Fourier-Spektrum:

Unter Nutzung von Polarkoordinaten ($x=r \cdot \cos\theta$, $y=r \cdot \sin\theta$, $u=\omega \cdot \cos\varphi$, $v=\omega \cdot \sin\varphi$) gelangt man schließlich zur Aussage:

$$f(r, \theta) \text{ o---} \bullet F(\omega, \varphi) \Leftrightarrow f(r, \theta + \theta_0) \text{ o---} \bullet F(\omega, \varphi + \theta_0)$$

Das bedeutet, daß eine Drehung des Bildes $f(x,y)$ um den Winkel φ zur gleichen Drehung bei $|F(u,v)|$ führt.



Implementierungshinweis:

- Rundungsfehler können bewirken, daß bei der Rücktransformation eines Bildes (meist kleine) negative Werte entstehen.

Eine Zuweisung negativer Werte vorzeichenlosen, ganzzahligen Variablen erzeugt hohe positive Werte.

Beispiel: Nach der Sequenz

```
float x=-1.1;
```

```
unsigned int uipixel=(unsigned int)x;
```

```
unsigned char *pixel=(unsigned char *)&uipixel;
```

hat `uipixel` den (max.erreichbaren) Wert 4.294.967.295
und jede der vier Variablen `pixel[]` den Wert 255.

Abhilfe (bezogen auf monochrome Bilder):

Bildung von `MIN(255 , MAX(0 , x))`.

Operationen im Frequenzbereich

- Die wichtigsten Fourier-Anwendungen beruhen auf der Entsprechung zwischen der Faltung im Ortsbereich und der Multiplikation im Frequenzbereich (Faltungssatz):

$$f(x) * h(x) \quad \circ \text{---} \bullet \quad H(u) \cdot F(u)$$

Zur elementweisen Multiplikation erfährt die (kleinere) Filter-Funktion (Maske) eine „Auffüllung“ mit Nullen auf die Größe des Bildes (engl. „*Padding*“: „Wattieren“).

Hierbei können Bild und Maske wahlweise (dann aber einheitlich) ihren Ursprung in der Mitte (zentriert) oder in der oberen linken Ecke der eigenen Bereiche haben.



Laplace-
Operator

*

-1	-1	-1
-1	-8	-1
-1	-1	-1

=

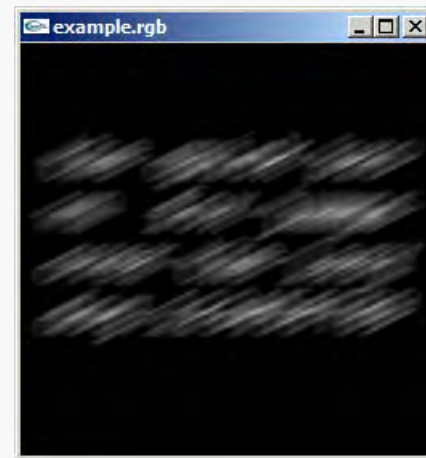
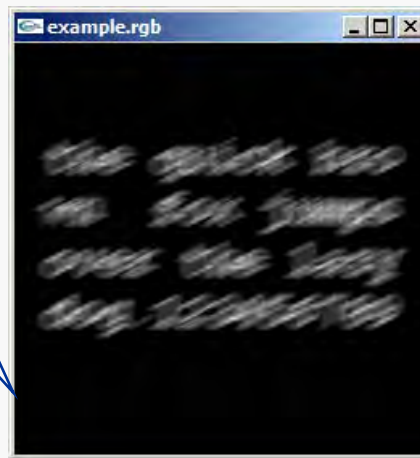


Operationen im Frequenzbereich

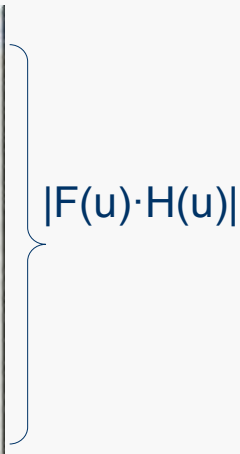
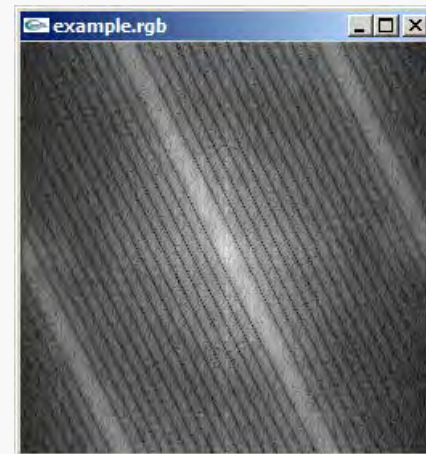
Bei Unschärfe läßt sich im Spektrum die überlagerte PSF-Transformierte erkennen – bei Bewegung: die Rechteck-Fkt.



8x16-PSF

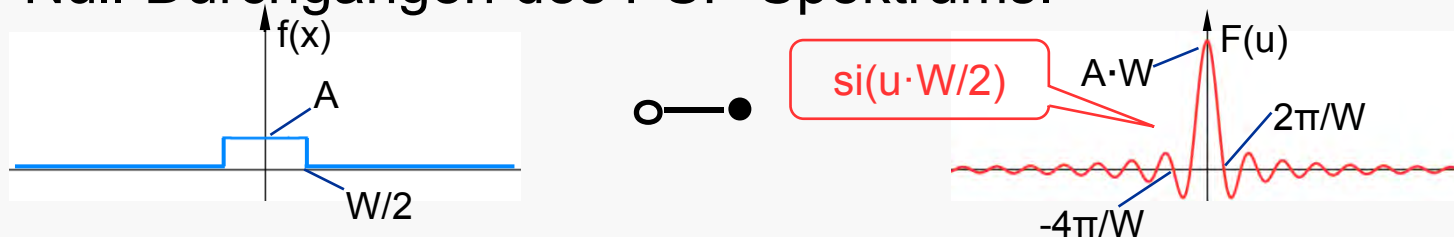


16x32-PSF



Ermittlung der Verwacklung aus dem Fourier-Spektrum:

- Aufnahme bei gerader, gleichmäßiger Relativbewegung zwischen Kamera und Objekt ergibt als Bild die Faltung des ursprünglichen Motivs mit einer Rechteck-PSF.
- Da die Faltung im Ortsbereich einer Multiplikation der Spektren gleichkommt, entstehen „Streifen“ zwischen den Null-Durchgängen des PSF-Spektrums.



- Die Null-Durchgänge liegen in Abständen von $k \cdot 2\pi/W$ ($k \in \mathbb{Z}$) ab dem Koord.-Ursprung, wenn die längste Periode (zur niedrigsten Frequenz) des Signals 2π beträgt – d.h.: Die ersten Null-Durchgänge links und rechts vom Koord.-Ursprung liegen somit $2 \cdot 2\pi/W$ voneinander entfernt.

- Aufgrund der Entsprechung $2\pi \Leftrightarrow M$ (bzw. N) liegen für ein Bildsignal mit der Periode von M Pixeln, das mit einer Rechteck-Funktion der Breite W gefaltet wurde, die ersten Null-Durchgänge ab dem Koordinaten-Ursprung im Abstand von $b = 2 \cdot M / W$ auseinander.

Wird z.B. ein Bild mit Kantenlänge 128 Pixel horizontal um eine Länge verwackelt, die 32 Pixeln entspricht, so ergeben sich links und rechts vom Ursprung seines Spektrums Null-Durchgänge im Abstand von:

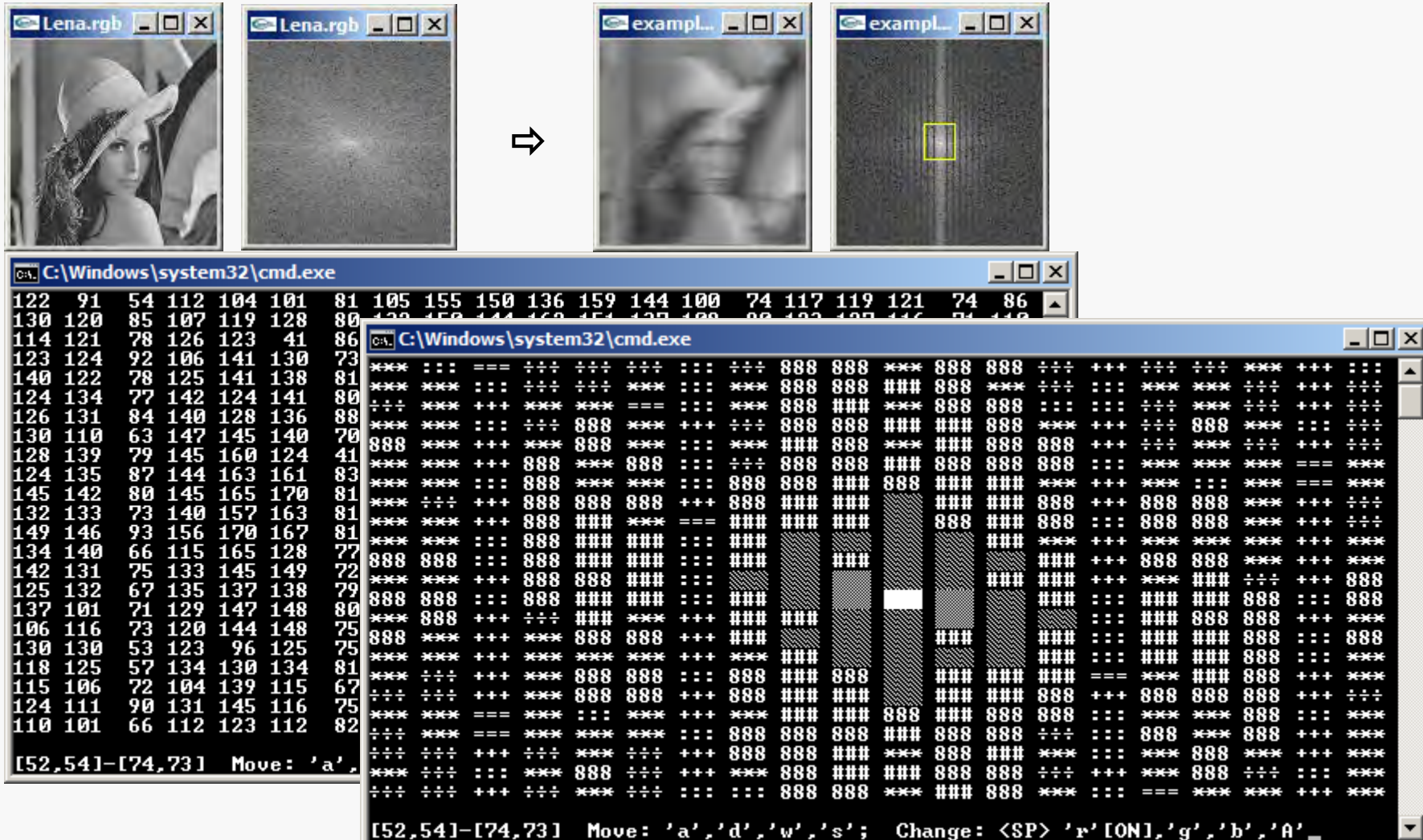
$$b = 2 \cdot 128 / 32 \text{ Pixeln} = 8 \text{ Pixeln}$$

Umgekehrt läßt ein Streifen der Breite b im Spektrum eines (als periodisch angenommenen) Bildes mit einer Kantenlänge M Pixel auf Verschmierung (Faltung) mit einer Rechteck-PSF der Breite W schließen, mit:

$$W = 2 \cdot M / b$$

Operationen im Frequenzbereich

Beispiel: Lena: 128x128 Pixel, PSF: 1x32 \Rightarrow Streifenbreite: 8



The diagram illustrates the process of blurring an image in the frequency domain. It shows four windows: the original Lena image, its Fourier transform, a vertical 1x32 pixel PSF, and the resulting blurred image. Below the images is a terminal window showing a coordinate grid and a visualization of the PSF.

```
C:\Windows\system32\cmd.exe
122  91  54 112 104 101  81 105 155 150 136 159 144 100  74 117 119 121  74  86
130 120  85 107 119 128  80 139 158 144 169 154 137 189  88 193 197 146  74 118
114 121  78 126 123  41  86 123 124  92 106 141 130  73 140 122  78 125 141 138  81
124 134  77 142 124 141  80 126 131  84 140 128 136  88 130 110  63 147 145 140  70
140 122  78 125 141 138  81 128 139  79 145 160 124  41 124 135  87 144 163 161  83
124 134  77 142 124 141  80 145 142  80 145 165 170  81 132 133  73 140 157 163  81
149 146  93 156 170 167  81 134 140  66 115 165 128  77 142 131  75 133 145 149  72
125 132  67 135 137 138  79 106 116  73 120 144 148  75 118 125  57 134 130 134  81
115 106  72 104 139 115  67 124 111  90 131 145 116  75 110 101  66 112 123 112  82
[52,54]-[74,73] Move: 'a'

C:\Windows\system32\cmd.exe
*** ::: === +++ +++ +++ ::: +++ 888 888 *** 888 888 +++ +++ +++ +++ *** +++ :::
+++ *** ::: +++ +++ *** === ::: *** 888 888 ### 888 *** +++ +++ +++
*** *** ::: +++ 888 *** 888 +++ +++ 888 888 ### ### 888 *** +++ +++ 888 *** :::
888 *** +++ *** 888 888 *** ::: *** ### 888 *** ### 888 888 +++ +++ *** +++
*** *** +++ 888 888 888 +++ 888 ### ### 888 888 888 888 +++ 888 888 *** += ***
*** *** +++ 888 ### *** === ### ### ### 888 ### 888 ::: 888 888 *** +++ +++
888 888 ::: 888 ### *** ::: ### ### ### 888 ### 888 +++ 888 888 *** +++ ***
*** *** +++ 888 888 888 +++ 888 ### ### 888 888 888 888 +++ 888 888 *** += ***
*** +++ +++ *** 888 888 +++ 888 ### ### 888 888 888 888 +++ 888 888 888 +++
+++ +++ +++ *** 888 888 +++ 888 ### ### 888 888 888 888 +++ 888 888 888 +++
+++ *** === *** *** *** ::: 888 888 888 ### 888 888 +++ 888 *** 888 +++ ***
+++ +++ +++ +++ *** 888 +++ +++ 888 888 ### *** 888 888 888 +++ *** 888 ***
+++ +++ +++ *** 888 +++ +++ 888 888 *** ### 888 888 888 +++ *** 888 +++ ***
```

- Bei Kenntnis der Verschmierungsfunktion (PSF) kann, umgekehrt, d. ungestörte Bild mit elementweise Division d. Fourier-Transformierten gewonnen werden (Invers-Filter):

$$g(x,y) = \mathcal{F}^{-1} \{ F(u,v) \cdot H(u,v) \}$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \mathcal{F}^{-1} \{ G(u,v) / H(u,v) \}, \text{ mit:}$$

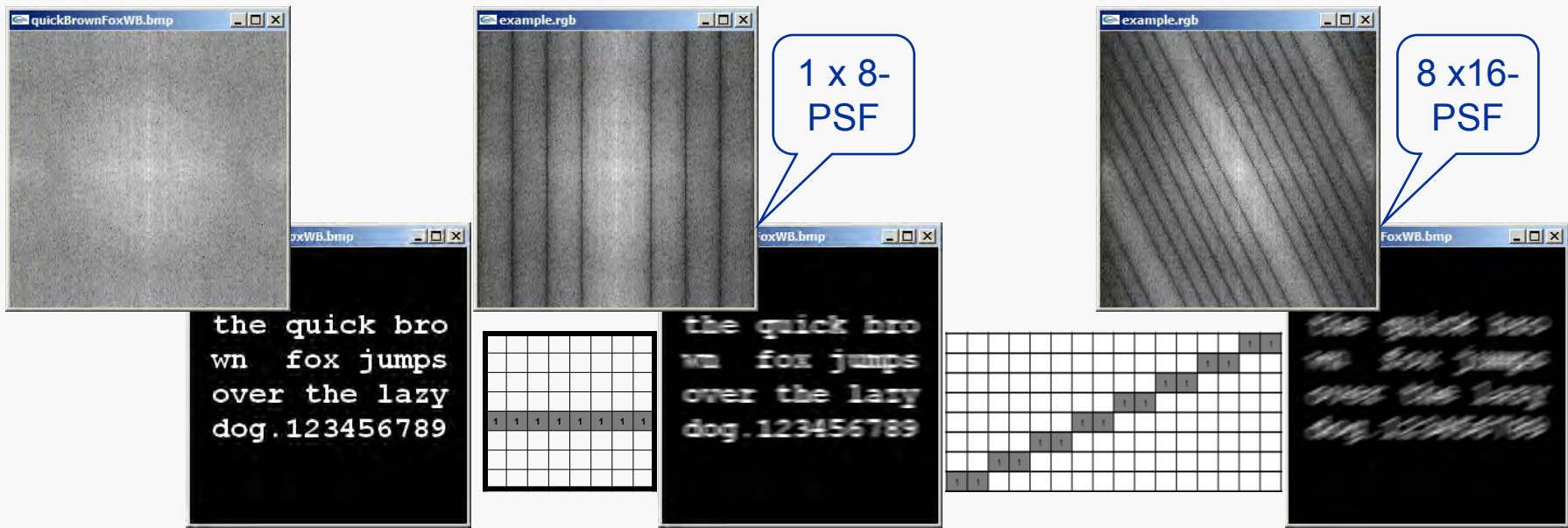
$$\text{Re}\{f(x,y)\} = \frac{\text{Re}\{G(u,v)\} \cdot \text{Re}\{H(u,v)\} + \text{Im}\{G(u,v)\} \cdot \text{Im}\{H(u,v)\}}{\text{Re}^2\{H(u,v)\} + \text{Im}^2\{H(u,v)\}}$$

$$\text{Im}\{f(x,y)\} = \frac{\text{Im}\{G(u,v)\} \cdot \text{Re}\{H(u,v)\} - \text{Re}\{G(u,v)\} \cdot \text{Im}\{H(u,v)\}}{\text{Re}^2\{H(u,v)\} + \text{Im}^2\{H(u,v)\}}$$

[Division komplexer Zahlen nach Erweiterung durch die konjugiert Komplexe des Nenners: $(a + A \cdot j) \cdot (b - B \cdot j) = a \cdot b + A \cdot B + j \cdot (A \cdot b - a \cdot B)$]

Zur Filterung im Frequenzbereich

- ist die explizite Lösung der dazugehörigen Integralgleichung im Ortsbereich unnötig (und meist unbekannt);
- erfolgt die Ermittlung der PSF meist durch Auswertung des Spektrums; darin ist $f(x,y)$ und $h(x,y)$ abgebildet;
- gehört der Umgang mit dem Problem möglicher Null-Divisionen zum Filterdesign (empfohlener Minimal-Divisor: $\epsilon=0,00015$).

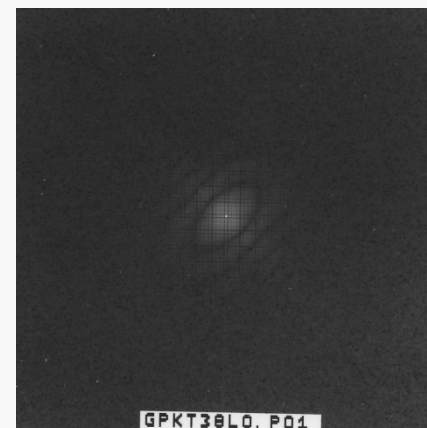
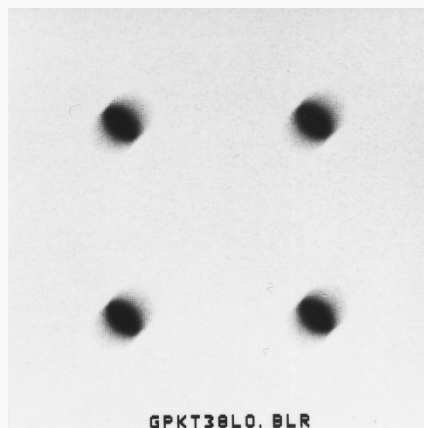
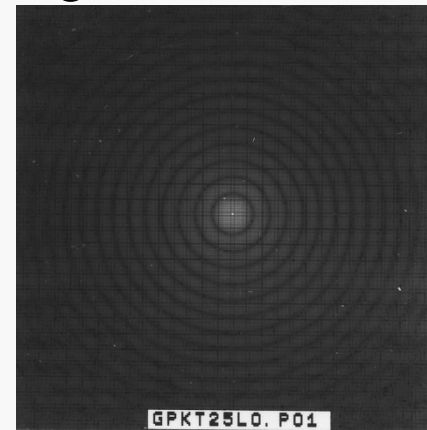
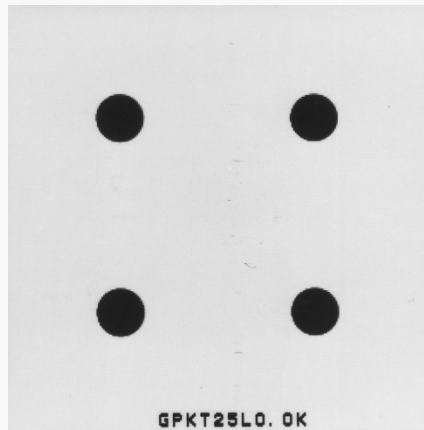


- Nichtlineare Übertragungsfkt. Grauwert $G \sim$ Schwärzung S

$$G = k_1 \cdot \lg(I_a / I_m) + k_2 = k_1 \cdot \lg(I_E) + k_2$$

$$k_1 \sim \gamma$$

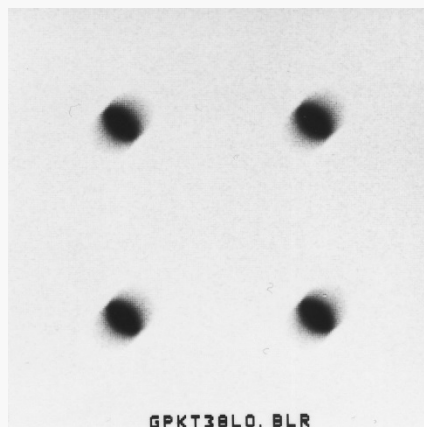
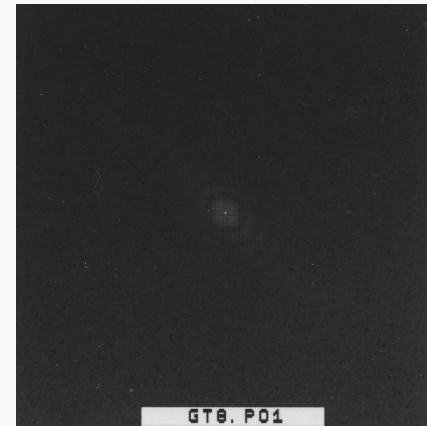
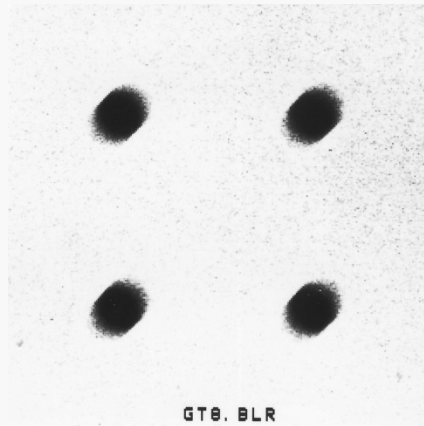
erschwert/vereitelt PSF-Ermittlung bei starkem Kontrast:



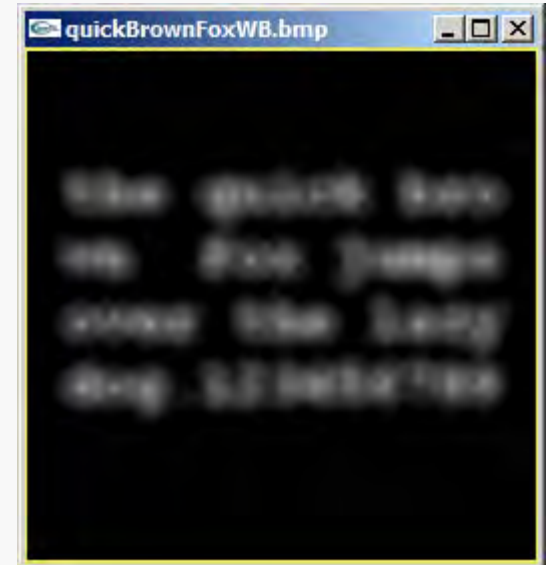
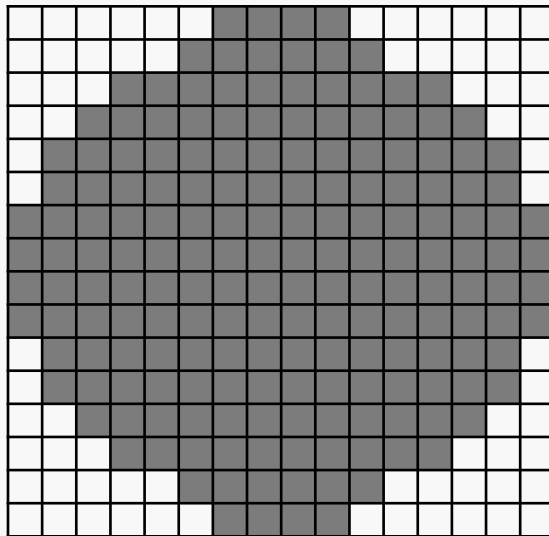
- Korrektur /Herstellung d. Linearität d. Abbildungssystems:
Transformierte Grauwerte $G_T \sim$ Belichtungsenergie I_E :

$$G_T = p \cdot 10^{q \cdot G}$$

$p: 0 \leq G_T \leq 255$
 $q: \min \leq I_E \leq \max$



Operationen im Frequenzbereich



Empfindlichkeit der
inversen Filterung
gegenüber Störungen
(hier: Defokussierung
mit 16x16-PSF;
inverse Filterung /
Histogramm-Rahmen)

