

- Häufige Aufgabenstellung in der Bildverarbeitung:
Extraktion kollinearier Punkte aus einem Punkteschwarm
Paul V.C. Hough: U.S. Patent 3 069 654; 1962
“Method and means for recognizing complex patterns”
Ursprung/Hintergrund:
Erkennung v. Flugbahnen radioaktiver Teilchen auf Fotos
- Grundidee:
 - Mathematik –
Ermittlung von Punkten,
die zu Geraden gehören (z.B. Interpolation)
 - Mustererkennung –
Ermittlung von Geraden,
die durch Punkte führen (z.B. Kantendetektion)



Grundidee:

Suche nach gemeinsamer Steigung m und Achsenabschnitt b , die Punkte mit bekannten Koordinaten (x, y) erfüllen

vgl. Geradengleichung: Suche nach Koordinaten (x, y) von Punkten, die zu einer Geraden mit bekannten (m, b) gehören

Geradengleichung:

$$y(x) = m \cdot x + b$$



Hough-Transformation:

$$b(m) = -x \cdot m + y$$

Beispiel:

$m=-1; b=4$	
$y(x)=-1 \cdot x+4$	
x	y
1	3
2	2
3	1

$x=1; y=3$	
$b(m)=-1 \cdot m+3$	
m	b
-1	4
0	3
1	2

$x=2; y=2$	
$b(m)=-2 \cdot m+2$	
m	b
-1	4
0	2
1	0

$x=3; y=1$	
$b(m)=-3 \cdot m+1$	
m	b
-1	4
0	1
1	-2

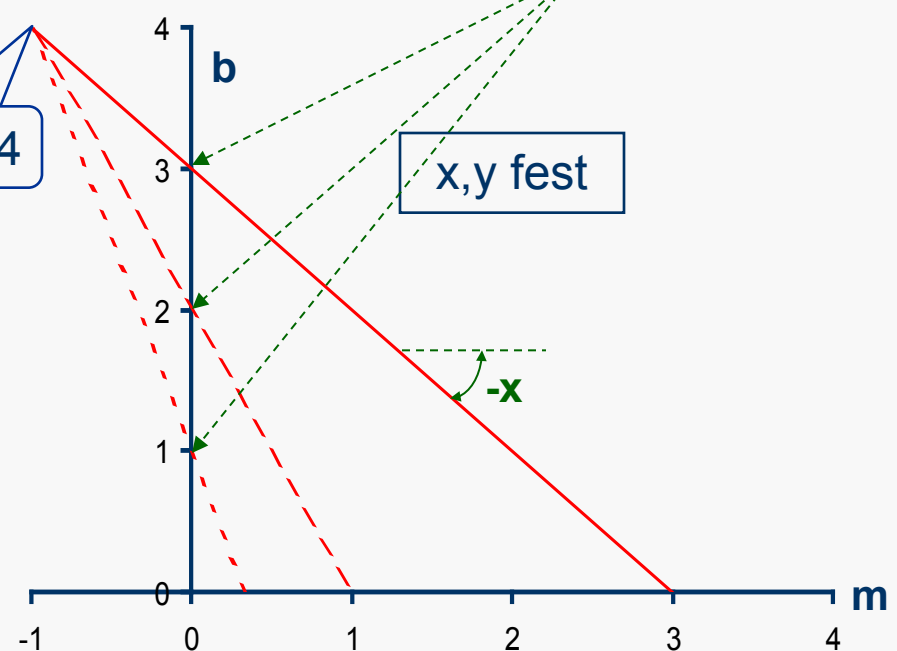
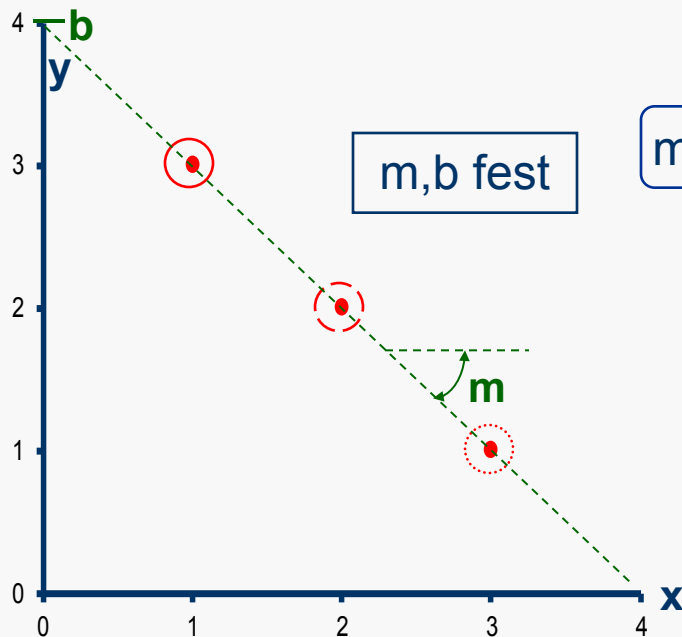
Globale Operationen: Hough

Geradengleichung:

$$y(x) = m \cdot x + b$$

Hough-Transformation:

$$b(m) = -x \cdot m + y$$



- Rollen-Vertauschung: Steigung $m \Leftrightarrow$ Abszisse x
Achsenabschnitt $b \Leftrightarrow$ Ordinate y
- Abbildung von Punkten in Geraden und umgekehrt

- Die Hough-Transformation transformiert Punkte in Geraden und umgekehrt.

Schneiden sich mehrere solcher Geraden in einem Punkt der m - b -Ebene, so sind die korrespondierenden Punkte der x - y -Ebene kollinear.

Der Schnittpunkt selbst mit den Koordinaten (m, b) ist die Transformierte jener Geraden der x - y -Ebene, welche die dazugehörigen Punkte enthält.

- Jeder hinzugenommene Punkt der x - y -Ebene erzeugt mit seiner Transformierten neue Schnittpunkte. Sie alle bieten ein Bild der Geraden, die mit den betrachteten Punkten gebildet werden können.

Globale Operationen: Hough

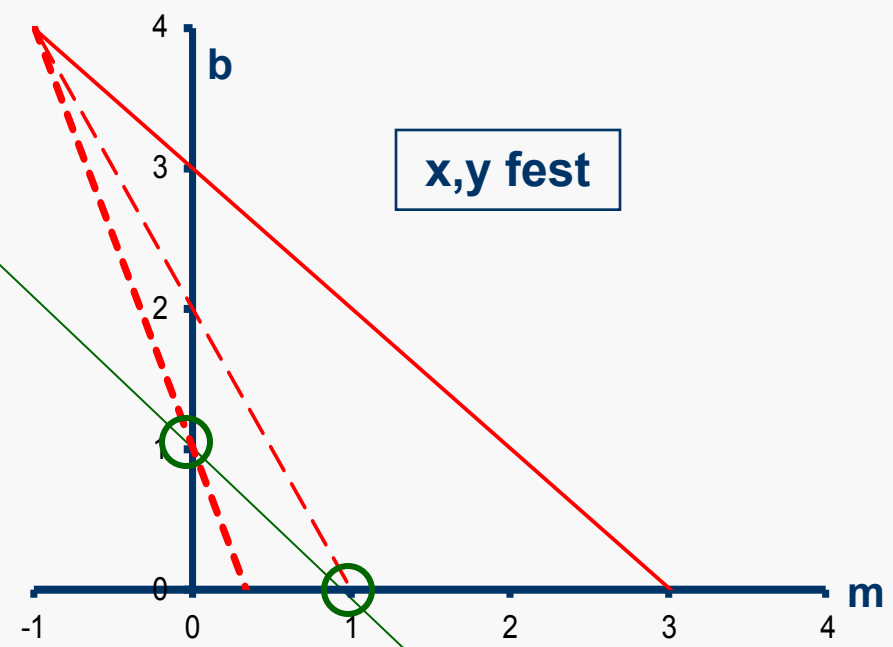
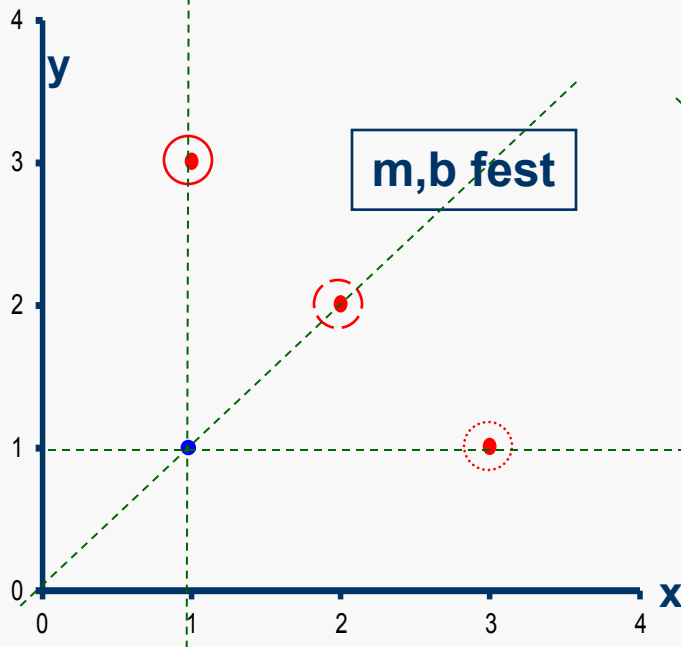
Geradengleichung:

$$y(x) = m \cdot x + b$$



Hough-Transformation:

$$b(m) = -x \cdot m + y$$



Problem: Abbildung vertikal verlaufender Geraden ($m, b \rightarrow \infty$)

Abhilfe: Hessesche Normalform

Globale Operationen: Hough

Zur Erinnerung – Otto Hesse (D, 1811-1874):

Erfassung der Geraden $y = m \cdot x + b$ durch ihren Abstand (Lotlänge) R zum Koordinatenursprung und den Winkel θ von der positiven x -Achse zu diesem Lot.

Umrechnung von (m, b) auf (R, θ) :

$$\sin(\theta) = \sin(\pi - \theta) = R / b \Rightarrow \underline{b = R / \sin(\theta)}$$

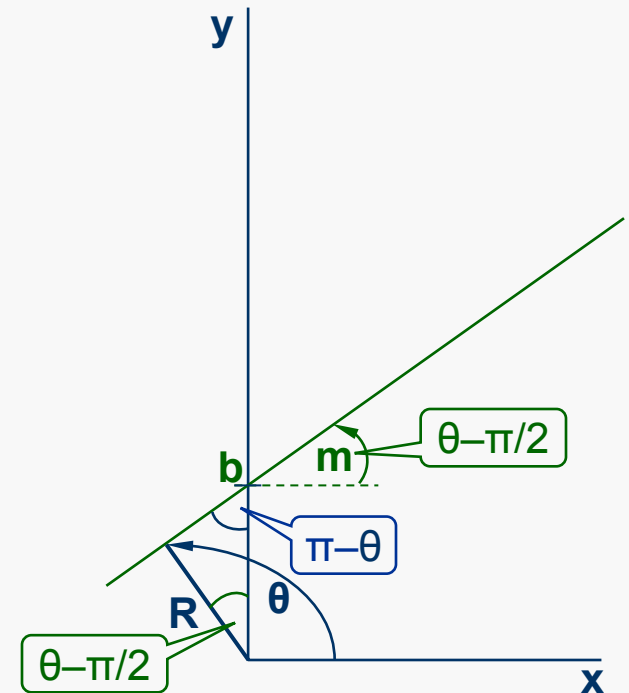
$$m = \text{tg}(\theta - \pi/2) = \sin(\theta - \pi/2) / \cos(\theta - \pi/2)$$

$$\underline{\sin(\theta - \pi/2)} = \sin(\theta) \cdot \cos(\pi/2) - \cos(\theta) \cdot \sin(\pi/2) \\ = \underline{-\cos(\theta)}$$

$$\underline{\cos(\theta - \pi/2)} = \cos(\theta) \cdot \cos(\pi/2) + \sin(\theta) \cdot \sin(\pi/2) \\ = \underline{\sin(\theta)}$$

$$y = x \cdot \sin(\theta - \pi/2) / \cos(\theta - \pi/2) + R / \sin(\theta) \\ = -x \cdot \cos(\theta) / \sin(\theta) + R / \sin(\theta)$$

$$\Rightarrow \boxed{R(\theta) = x \cdot \cos(\theta) + y \cdot \sin(\theta)} \\ \text{Hessesche Normalform}$$

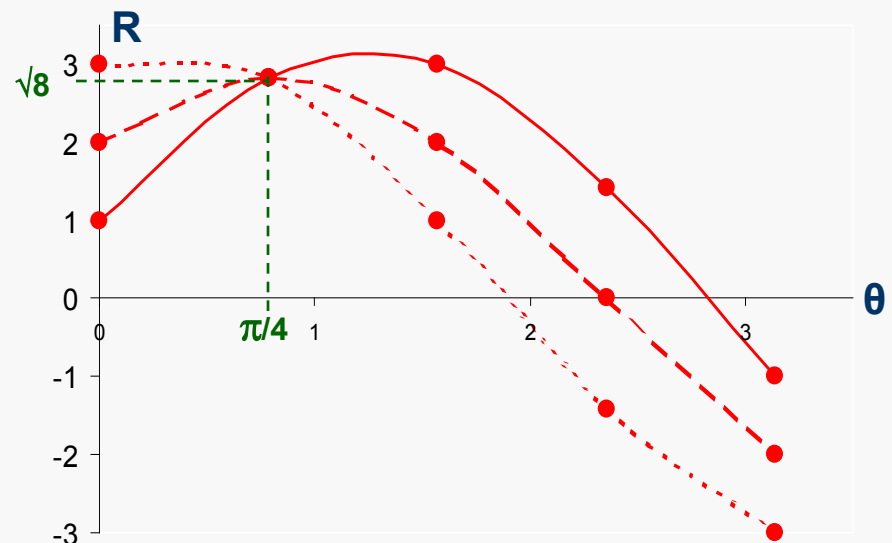
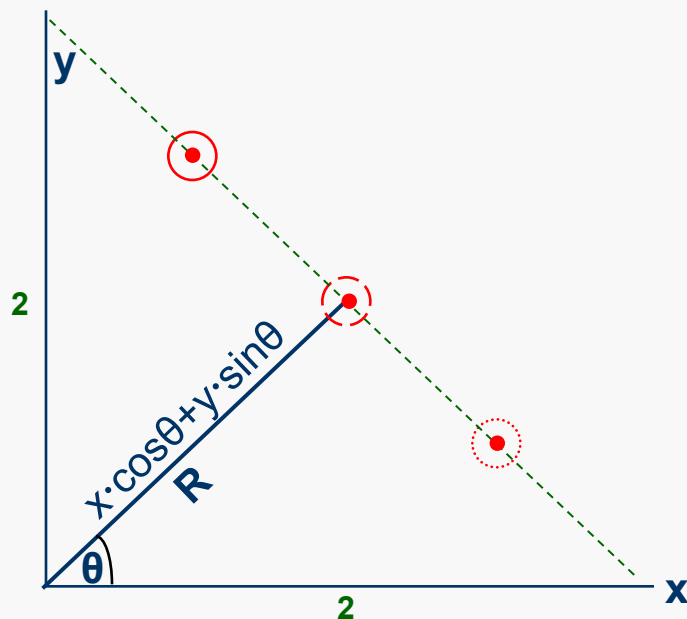


$$\boxed{\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta} \\ \boxed{\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta}$$

Einbeziehung (quasi-)vertikaler Geraden ($m, b \rightarrow \pm\infty$) durch die Hessesche Normalform:

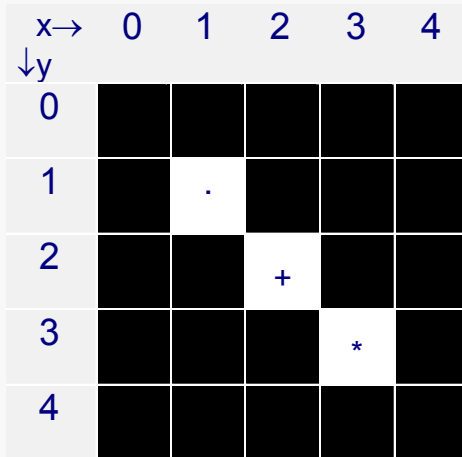
$$R(\theta) = x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta \quad (x, y \text{ fest; } 0 \leq \theta < \pi)$$

Punkte (x, y) werden in Sinusoide $R(\theta)$ abgebildet.



Globale Operationen: Hough

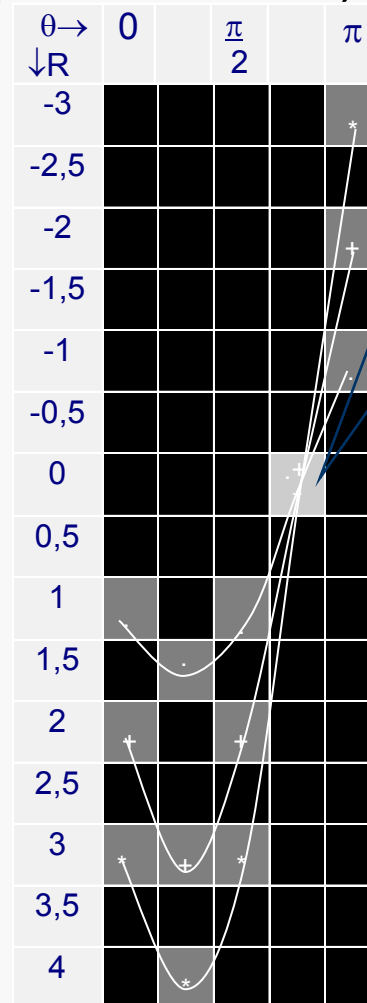
Anwendung auf Bilder (schemenhaft):



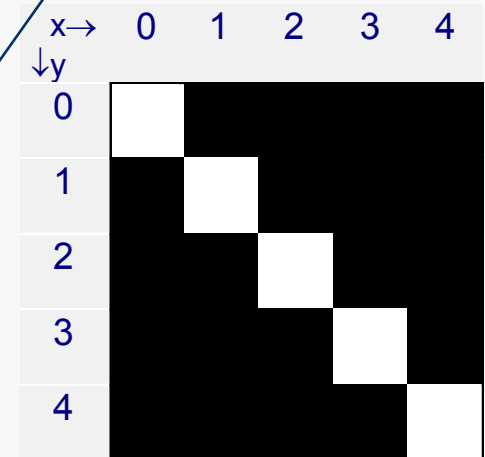
$$R_{ij} = x_i \cdot \cos\theta_j + y_i \cdot \sin\theta_j$$

$$(x_i, y_i) \in \{ (1,1); (2,2); (3,3) \}$$

$$\theta_j \in \{ 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi \}$$



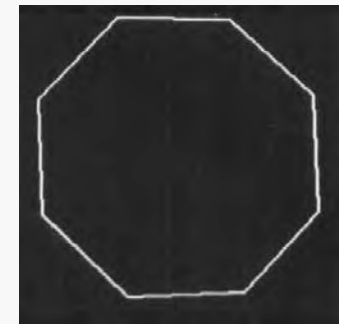
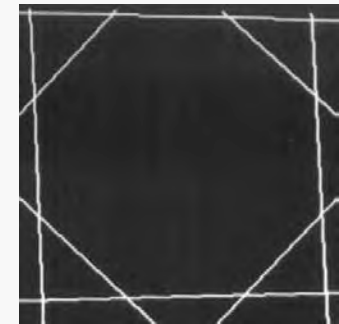
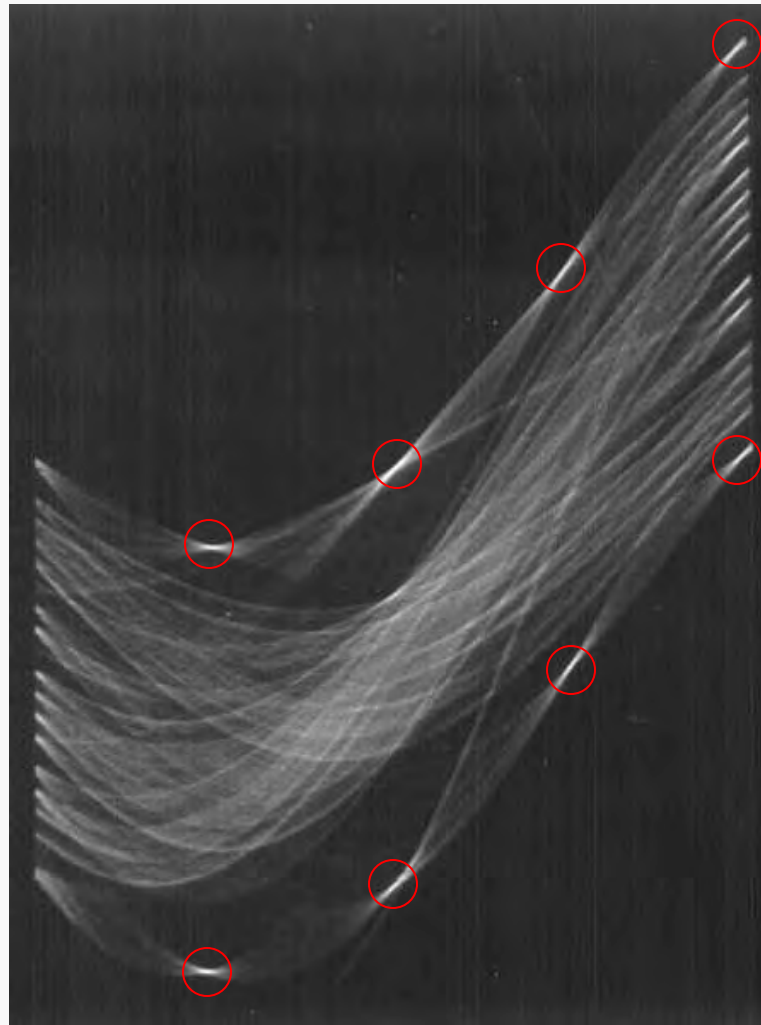
Schnittpunkt-Kennung:
Grauwert-Akkumulation



Ergebnis:
Akku-Maximum für
 $R=0, \theta=3\pi/4$

Akku-
mulator

Globale Operationen: Hough



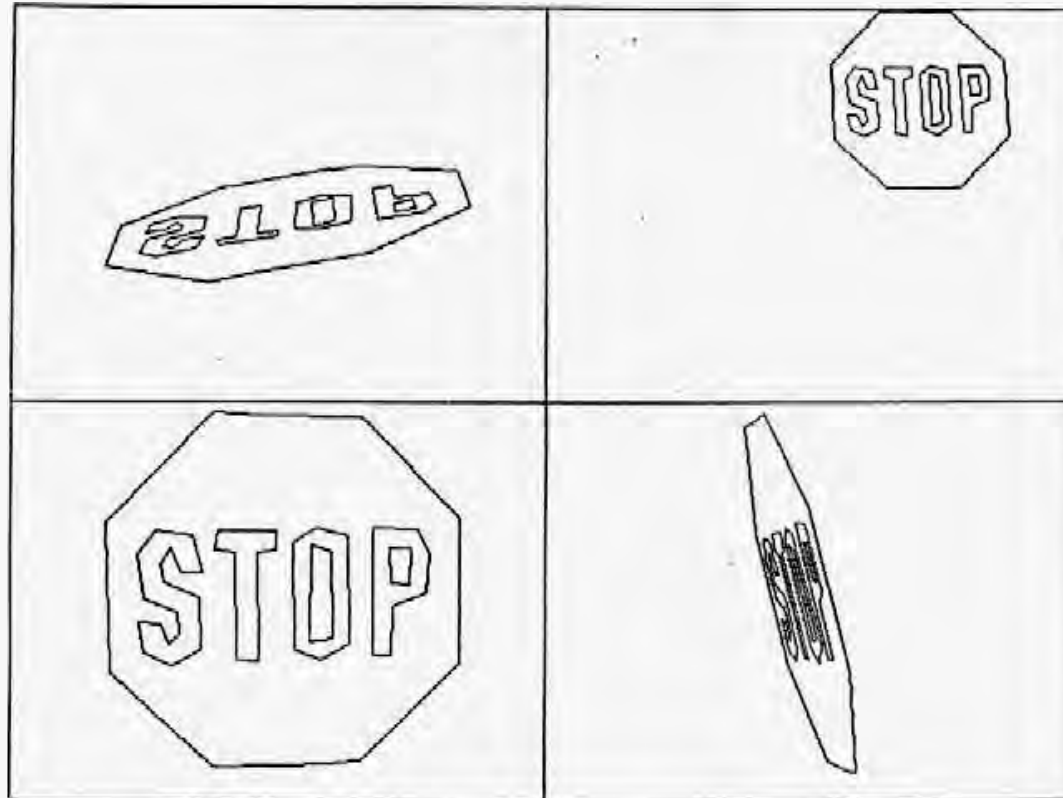
Bildpunkt-Beschreibung



Koordinaten-Beschreibung

Globale Operationen: Hough

Koordinaten-Beschreibung \Leftrightarrow Koordinaten-Transformationen:



Fotografische Datenbasen-Generierung für die Simulation von Verkehrsszenen

Bildanalyse ⇒ **Bildsynthese**



Weiterführende Aspekte u.a.:

- Genauigkeitsgrenzen (Bildauflösung, Rauschen)
- Erweiterungen auf „Complex Patterns“
- Schwellwertsuche Umgang mit Grauwerten
- Hough: Merkmalsextraktion!

Anwendungsgebiete:

- Segmentierung geradlinig begrenzter (bel.) Konturen
- Findung kollinear, paralleler o.a. adäquat erfaßter Muster
- Ergänzung unterbrochener Linien
(Steuerung d. Rausch-Filterung / Kartografie v. Unterführungen)
- Erkennung von Fluchtlinien zum Ausrichten
(Werkstücke auf Band / Roboter-Routenplanung im Lager)