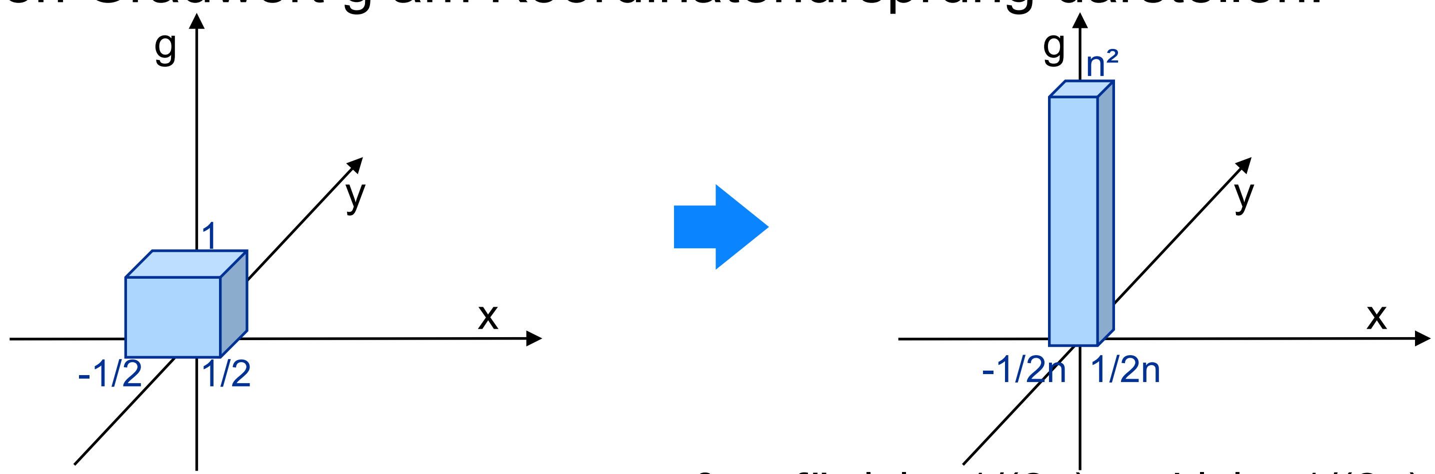
# Das Bild als Signal



- **Signal**: Funktion (Werteverlauf) als Informationsträger im Ortsbereich (f(x,y), z.B. Bild) o.i. Zeitbereich (f(t), z.B.Ton)

  Denkmodell aus der linearen Signalverarbeitung:

  Bild (=Signal) als Anordnung infinitesimaler „Punktquellen“
- Konzept der **Punktquelle**: Grenzwert eines Quaders, dessen Grundfläche einen Bildpunkt und dessen Volumen den Grauwert g am Koordinatenursprung darstellen:




$$\text{Rechteck-Funktion: } \mathrm{rect}(x,y) = \begin{cases} n^2 & \text{für } |x| \leq 1/(2n) \text{ und } |y| \leq 1/(2n) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

# Das Bild als Signal

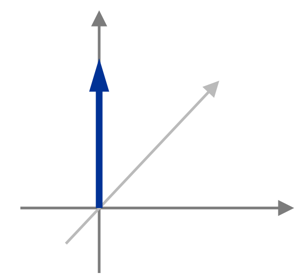


Der (als existent angenommene) Grenzwert der Punktquelle für $n \rightarrow \infty$ ist das sog. **Dirac Delta** (die Dirac-Impulsfunktion):

Funktion, die um den Koordinatenursprung einen Quader mit verschwindend kleiner Grundfläche, unendlicher Höhe und Volumen =1 bildet, und die sonst überall =0 ist:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int \delta(x,y)\, dx\, dy = 1$$

Symbol:



Für das Produkt einer beliebigen, reellwertigen Funktion g(x,y) mit der Delta-Funktion gilt demnach:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int g(x,y) \cdot \delta(x,y)\, dx\, dy = g(0,0)$$

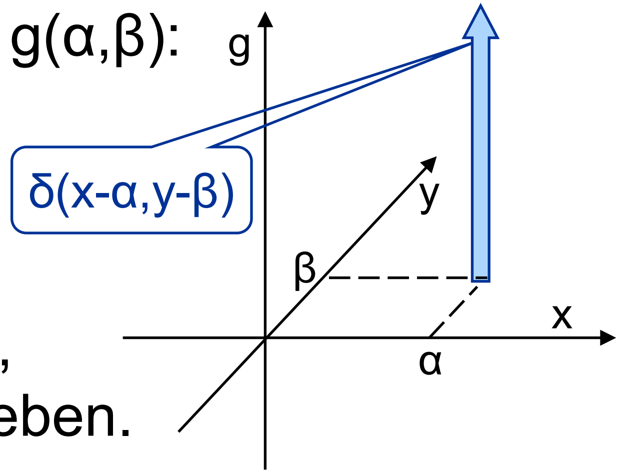
Siebeigenschaft von δ
(engl. *sifting property*)

(g(x,y) kann den Helligkeitsverlauf in einem Bild darstellen.)

# Das Bild als Signal



Mit dem Dirac-Impuls gilt für den Wert von g(α,β):




$$\int_{-\infty}^{\infty}\int g(x,y) \cdot \delta(x-\alpha,y-\beta)\,dx\,dy = g(\alpha,\beta)$$

Ausdruck zur „Probe-Entnahme“, geeignet, Funktionen beliebigen Verlaufs wiederzugeben.

Nutzung der Symmetrie [ d.h.: $\delta(\alpha-x,\beta-y) = \delta(x-\alpha,y-\beta)$ ]

und Vertauschung der Bezeichner ergibt:

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int f(\alpha,\beta) \cdot \delta(x-\alpha,y-\beta)\,d\alpha\,d\beta$$

Interpretation: Funktionswert einer kontinuierlichen Funktion f bei (x,y) als Integral über den unendlichen Definitionsbereich des Produktes mit dem diskreten δ-Impuls; z.B. (s.o.):

Wiedergabe eines Bildes als Anordnung von Punktquellen

# Das Bild als Signal



Wissen um die Verarbeitung von Bildern als Anordnungen von Punktquellen $f(x,y)$ durch ein **lineares System** (mathem. dargestellt durch linearen Operator $H[\,f(x,y)\,]$) erleichtert die Berechnung des Verarbeitungsergebnisses.

- **Linearität** bedeutet **Additivität**:

  $$H[\,f_1(x,y) + f_2(x,y)\,] = H[\,f_1(x,y)\,] + H[\,f_2(x,y)\,]$$

  (i.W.: Die Antwort auf die Summe beliebiger Erregungen ist gleich der Summe der Antworten auf die einzelnen Erregungen.)

  Daraus folgt unmittelbar die **Homogenität** ($\alpha$ konstant):

  $$H[\,\alpha \cdot f_1(x,y)\,] = \alpha \cdot H[\,f_1(x,y)\,]$$

  und daraus allgemeiner ($\alpha$, $\beta$ konstant):

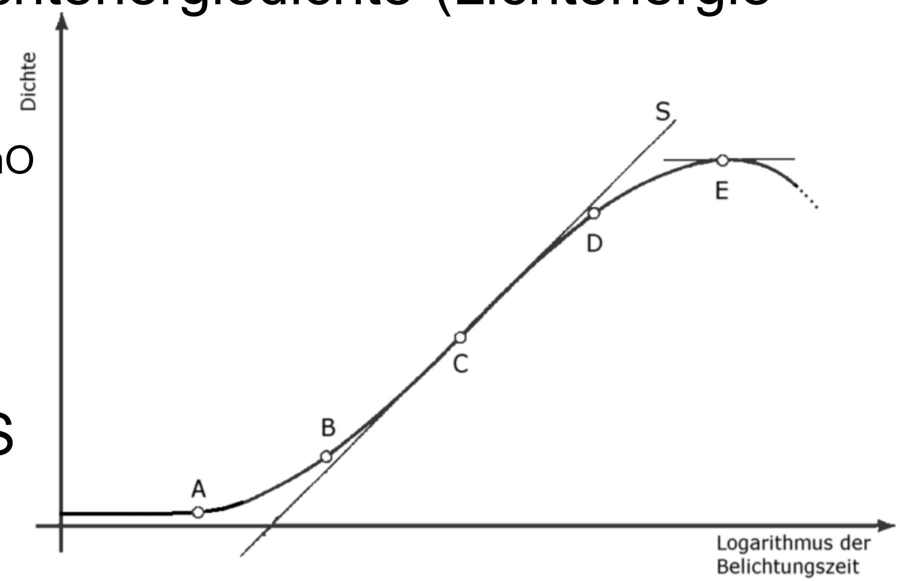
  $$H[\,\alpha \cdot f_1(x,y) + \beta \cdot f_2(x,y)\,] = \alpha \cdot H[\,f_1(x,y)\,] + \beta \cdot H[\,f_2(x,y)\,]$$

**Beispiel zur Linearität:**

Die Schwärzung (optische Dichte) $S_O$ der Fläche eines Objektes ist definiert als der Logarithmus des Verhältnisses $I_{aO} / I_{mO}$ der auf diese Fläche aufgestrahlten zu der vor ihr gemessenen / fotografierten Lichtenergiedichte (Lichtenergie pro Fläche und Zeit):

$S_O = \lg (I_{aO} / I_{mO}) = \lg I_{aO} - \lg I_{mO}$

Aufnahme der Schwärzung $S_O$ im linearen Arbeitsbereich der Gamma-Kurve eines Films erzeugt dort eine Schwärzung S nach der linearen Beziehung:




Grafik: Wikipedia

$S = \gamma \cdot S_O + c$

$\quad = \gamma \cdot (\lg I_{aO} - \lg I_{mO}) + c$ (γ, c konstant)

# Das Bild als Signal



## Beispiel zur Linearität (Forts.):

Eine Änderung der aufgestrahlten Belichtungsenergie $I_a$ um eine multiplikative Konstante α (z.B. durch Variation der Belichtungszeit) führt zu einer Aufnahme mit der Schwärzung

$$S' = \gamma \cdot \lg(\alpha \cdot I_{aO} / I_m) + c = \gamma \cdot (\lg(\alpha) + S_O) + c$$

$$= S + \gamma \cdot \lg(\alpha) \neq \alpha \cdot S$$

nichtlineares System $S=f(I_{aO})$

Wird die aufzunehmende Schwärzung $S_O$ auf $S_O$"$=\alpha \cdot S_O$ erhöht (z.B. durch Filter), so erzeugt sie eine Aufnahme

$$S'' = \gamma \cdot \alpha \cdot S_O + c \neq \alpha \cdot (\gamma \cdot S_O + c).$$

nichtlineares System $S=f(S_O)$

Anders verhält es sich, wenn Schwärzungsdifferenzen (Kontraste $\Delta S_i = S_{i2} - S_{i1}$) die Ein- u. die Ausgangssignale sind:

Aus $\Delta S = \gamma \cdot \alpha \cdot S_{O2} + c - (\gamma \cdot \alpha \cdot S_{O1} + c) = \alpha \cdot \gamma \cdot (S_{O2} - S_{O1})$

folgt: $\Delta S = \alpha \cdot \Delta S_O$

lineares System $\Delta S = H[\Delta S_O]$

[ D.h.: Fotos sind lineare Abbildungen der aufgenommenen Kontraste – nicht der absoluten Lichtverhältnisse oder Farbtöne. ]

# Das Bild als Signal



- Verarbeitung (d.h. Abbildung) eines Ursprungsbildes f(x,y) zu einem Ergebnisbild g(x,y) durch den Operator H[ ]:

$$g(x,y) = H\left[\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int f(\alpha,\beta)\cdot\delta(x-\alpha,y-\beta)\,d\alpha\,d\beta\right]$$

z.B.: Betrachtung v. Kontrasten

- Ist H **linear**, so gilt (da Integration=Summenbildung):

$$g(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int H\left[f(\alpha,\beta)\cdot\delta(x-\alpha,y-\beta)\,d\alpha\,d\beta\right]$$

z.B.: keine Linsenschäden

- Ist H auch **ortsinvariant** (engl. *space* bzw. *shift invariant*, d.h.: H [ f(x–α,y–β) ] = g(x–α,y–β) ∀ α, β), so ist:

$$g(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int f(\alpha,\beta)\cdot \underbrace{H\left[\delta(x-\alpha,y-\beta)\right]}_{\text{„Systemkonstante } h(x,y)\text{“}}\,d\alpha\,d\beta$$

# Das Bild als Signal



- Die Funktion

  $$\mathbf{h(x,y)} = H[\,\delta(x,y)\,]$$

  ist die Abbildung einer Punktquelle durch das zugrunde liegende (lineare, ortsinvariante) Verarbeitungssystem.

  Sie ist die Impulsantwort (engl. *impulse response*) des Systems: Reaktion auf d. Erregung mit einem Lichtimpuls.

  Mit ihr ist das (lineare, ortsinv.) Abbildungssystem erfaßt

  („Aufnahme-Güte“ unabhängig vom Aufnahme-Motiv).

- h(x,y) wird als **Punkt-Spreiz-Funktion** (engl. *point spread function*), **PSF**, auch: (Punkt-) Verschmierungsfunktion oder Unschärfe-Funktion) bezeichnet, weil sie in reellen Optik-Systemen die infinitesimal kleinen Punktquellen stets in endlicher Größe abbildet.

# Das Bild als Signal



- Die Einführung der PSF $h(x,y) = H [ \delta(x,y) ]$ vereinfacht die Berechnung des Ergebnisbildes zu:

$$\mathbf{g(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int f(\alpha,\beta) \cdot h(x-\alpha,y-\beta)\, d\alpha\, d\beta}$$

- Dieser Integraltyp wird Faltungsintegral, die Operation wird **Faltung** (engl. *convolution*) der Funktionen f(x,y) und h(x,y) genannt und symbolisch geschrieben als:

$$\mathbf{g(x,y) = f(x,y) * h(x,y)}$$

<u>Beispiel für PSF:</u>

Nachtfotos von Sternen als Punktquellen am Himmel:

PSF durch Linsen, Erdumdrehung, Erschütterungen

# Das Bild als Signal



In digitalen Systemen

- … ist die Impulsantwort (PSF) mind. 1x1 Pixel: **Maske**!
- … wird aus dem doppelten Integral eine doppelte Summe (doppelte, geschachtelte Schleife für jedes Pixel); bei einer MxN-Maske berechnet sich jedes Pixel g(x,y) zu:

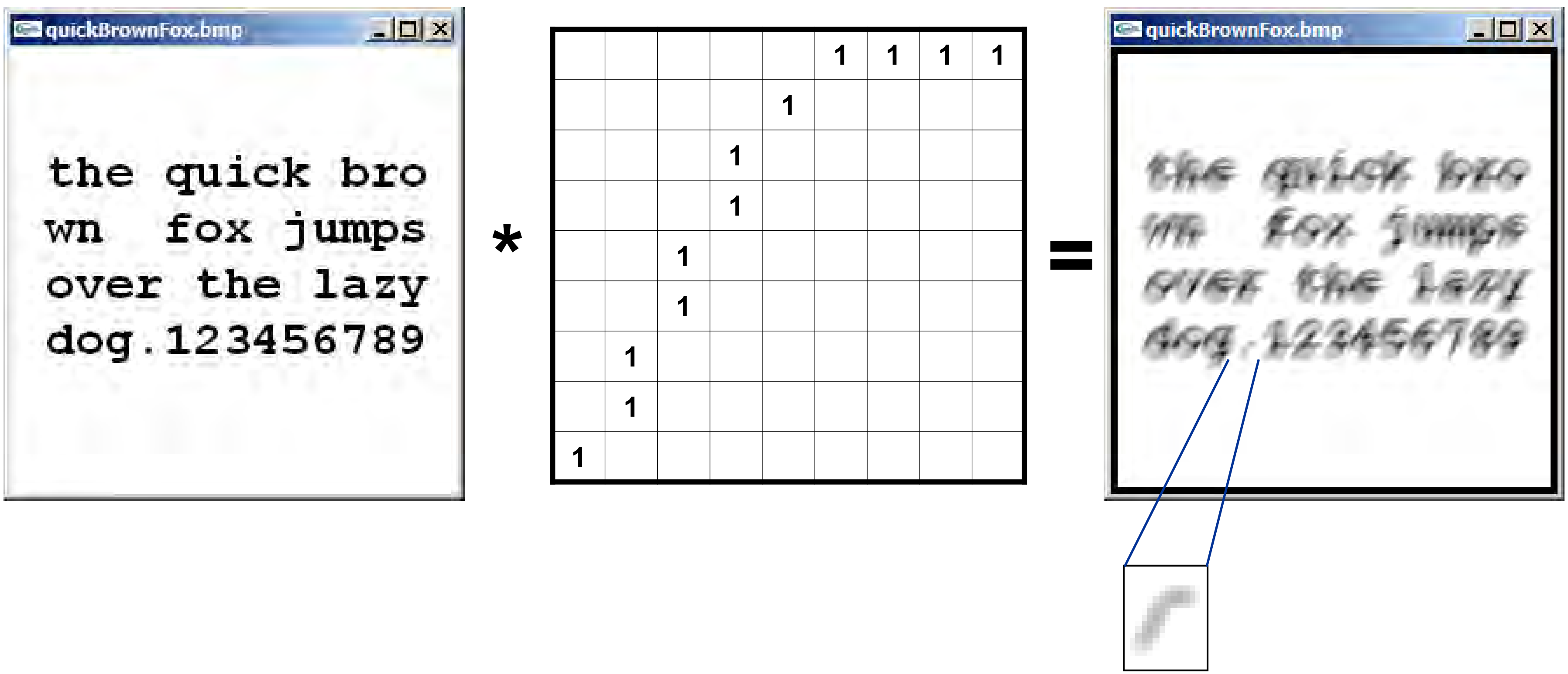
  $$g(x,y) = 1/(M \cdot N) \cdot \sum_{M} \sum_{N} f(m,n) \cdot h(x - m, y - n)$$

- … wird h(y-β) durch Umkehrung der Reihenfolge der Zeilen, h(x-α) durch Umkehrung der Spalten gebildet.
- … stellen PSF-Masken mit positiven Elementen eine virtuelle Aufzeichnung der durchlaufenen Positionen bei der Verwacklung eines Bildmotivs dar; die Beträge der Masken-Elemente geben die Anteile dieser Positionen an der Mehrfach-Belichtung wieder.

# Das Bild als Signal



## Beispiel einer virtuellen Verwacklung:




**Übung:** `DIPops.c`