Globale Operationen

- Operationen / Funktionen, die alle Pixel des Eingabebildes benötigen, bevor sie ein Pixel oder eine Aussage für das Ergebnisbild ermitteln, nennt man **global**.

  (Beispiel: Erkennung / Behebung von Unschärfe)

- Wichtiges mathem. Werkzeug: **Fourier-Transformation**

  - entwickelt 1807 von Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830, F), inspiriert vom Problem der schwingenden Saite

  - veröffentlicht erst 1822 mit Studien zur Wärmeausbreitg aufgrund massiver Bedenken führender Mathematiker

- Fourier konstatierte: **Beliebige periodische Funktionen** können durch eine Summe gewichteter **Sinus- und Cosinus-**Funktionen unterschiedlicher Frequenzen **exakt** (verlustfrei) **wiedergegeben** (nicht: approximiert!) werden.

  Man beachte: Reales (gedämpftes) Pendel schwingt <u>nicht</u> periodisch; Herztöne, Gezeiten,…, verlaufen periodisch.

Fourier-Reihen

- Anliegen von Fourier:

  Approximation periodischer Fkt. f(x) als Linearkombination von (2π-) periodischen trigonometrischen Funktionen

  cos(0x), sin(0x), cos(x), sin(x), cos(2x), sin(2x), ... bzw.

  1, cos(x), sin(x), cos(2x), sin(2x), ..., cos(nx), sin(nx)

- Hintergrund / Ziel:
  - Effizientere (d.h.: ebenso wirksame, weniger aufwendige) Codierung period. Funktionen (vgl.: Ton-Kompression)
  - Erfassung nicht explizit bekannter periodischer Vorgänge (vgl.:Sternbewegung,Bahnhofsuhr,Atmung,Gezeiten,EKG)
- Approximationsansatz mit dem sog. **Fourier-Polynom**:

$$g_n(x) = \tfrac{1}{2}\, a_0 + \sum_{k=1}^{n} \{ a_k \cdot \cos(k \cdot x) + b_k \cdot \sin(k \cdot x) \} \approx f(x)$$

- Forderung: Minimale Abweichung im quadratischen Mittel

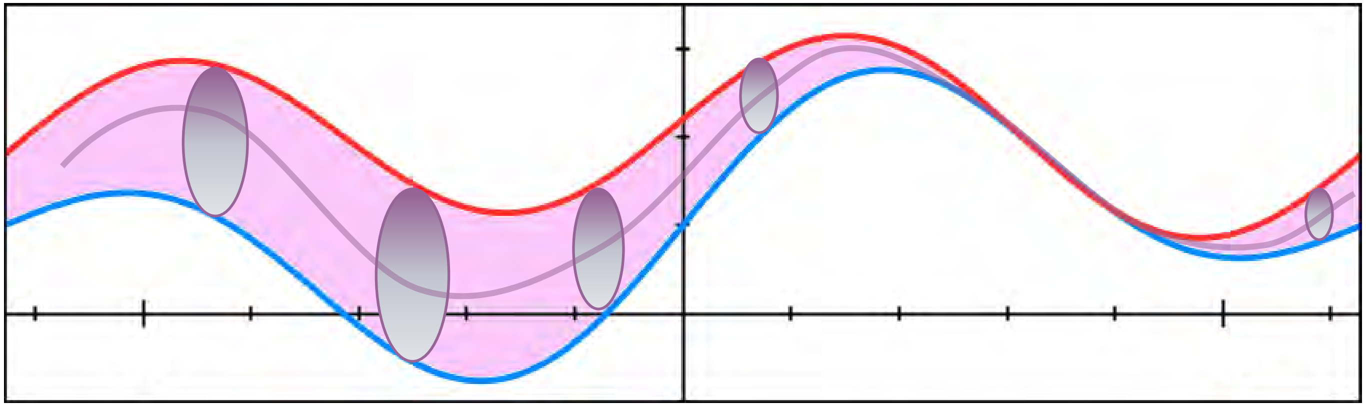
Fourier-Reihen

- Forderung (Forts.):

  Minimierung der Differenz zwischen d. approximierenden Funktion $g_n(x)$ u. d. gegebenen Funktion f(x) in d. L_2-Norm

$$F := \| g_n(x) - f(x) \|_2{}^2 := \int_{-\pi}^{\pi} [\, g_n(x) - f(x) \,]^2 \, dx = \text{Min!}$$

  D.h.: Minimierung des Volumens eines „Schlauchs“, dessen variabler Querschnitt dem Quadrat der Differenzen zwischen $g_n(x)$ und f(x) proportional ist.



Fourier-Reihen

Mathematische Formulierung der Minimierungsforderung

$$F := \int_{-\pi}^{\pi} [\, g_n(x) - f(x)\,]^2 \; dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} [\tfrac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{n} \{ a_k \cdot \cos(k \cdot x) + b_k \cdot \sin(k \cdot x) \} - f(x)]^2 \, dx \overset{!}{=} \text{Min}$$

bedeutet, in 2n+1 Gln (für a_0, a_k, b_k) 1. Ableitg=0 zu setzen. (Extremwerte quadratischer Funktionen sind Minima!)

… ⇨ $\partial F/\partial a_0 = \pi \, a_0 - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx \; (\ldots) \overset{!}{=} 0$

$$\partial F/\partial a_k = -\,2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(k \cdot x)\, dx + 2 \cdot \pi \cdot a_k \overset{!}{=} 0, \; (k = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\partial F/\partial b_k = -\,2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(k \cdot x)\, dx + 2 \cdot \pi \cdot b_k \overset{!}{=} 0, \; (k = 1, 2, \ldots, n)$$

Fourier-Reihen

Daraus ergibt sich für die **Fourier-Koeffizienten von f(x)**:

$$\left.\begin{array}{ll}
\mathbf{a_0} = 1/\pi \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx & \\[2em]
\mathbf{a_k} = 1/\pi \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(k \cdot x)\, dx & (k = 1, 2, \ldots, n) \\[2em]
\mathbf{b_k} = 1/\pi \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(k \cdot x)\, dx & (k = 1, 2, \ldots, n)
\end{array}\right\} \text{Euler-Fouriersche Formeln}$$

Es stellt sich heraus, daß (wenn die o.a. Integrale existieren) das Fourier-Polynom $g_n(x)$ für $n \rightarrow \infty$ gegen die approximierte periodische Funktion f(x) konvergiert, d.h.:

$$f(x) = \tfrac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{ a_k \cdot \cos(k \cdot x) + b_k \cdot \sin(k \cdot x) \}$$

- Brook Taylor (1685-1731, GB) entwickelte Reihen, z.B.:

  $\sin x = x/1! - x^3/3! + x^5/5! - \ldots + (-1)^n x^{2n+1} / (2n+1)! \pm \ldots$

  $\cos x = 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + \ldots + (-1)^n x^{2n} / (2n)! \pm \ldots$

- Leonhard Euler (1707-1783, CH) führte die Zahl e ein:

  $e = \lim\limits_{n \to \infty} (1+1/n)^n = 2{,}718281828\ldots$ (als Grenzwert)

  bzw., als unendliche Reihe:

  $e = 1/0! + 1/1! + 1/2! + 1/3! + \ldots$

  und $e^{\alpha x}$ nach Reihenentwicklung (bel. konst. Faktor α):

  $e^{\alpha x} = 1 + \alpha \cdot x + (\alpha \cdot x)^2/2! + (\alpha \cdot x)^3/3! + (\alpha \cdot x)^4/4! + \ldots$

- Für $\alpha = j = (-1)^{½}$ folgt daraus die **Eulersche Identität**

  $$e^{j \cdot x} = 1 + j \cdot x - x^2/2! - j \cdot x^3/3! + x^4/4! + j \cdot x^5 / 5! \ldots$$

  $$= [\, 1 - x^2/2! + x^4/4! - + \ldots] + j \cdot [\, x - x^3/3! + x^5/5! - + \ldots]$$

  $\boxed{\mathbf{e^{\pm j \cdot x} = \cos x \pm j \cdot \sin x}}$ (auch: Eulersche Funktion, 1749)

Einsetzen der Eulerschen Identität in das Fourier-Polynom:

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\, a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{\, a_k \cdot \cos(k\cdot x) + b_k \cdot \sin(k\cdot x) \,\}$$

$$\begin{aligned} = \tfrac{1}{2}\, a_0 + \tfrac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \{\, & a_k \cdot \cos(k\cdot x) + b_k \cdot \sin(k\cdot x) \\ & - j\cdot a_k \cdot \sin(k\cdot x) + j\cdot b_k \cdot \cos(k\cdot x) \\ & + a_k \cdot \cos(k\cdot x) + b_k \cdot \sin(k\cdot x) \\ & + j\cdot a_k \cdot \sin(k\cdot x) - j\cdot b_k \cdot \cos(k\cdot x) \,\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = \tfrac{1}{2}\, a_0 + \tfrac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \{\, & (a_k + j\cdot b_k) \cdot (\cos(k\cdot x) - j\cdot \sin(k\cdot x)) \\ & + (a_k - j\cdot b_k) \cdot (\cos(k\cdot x) + j\cdot \sin(k\cdot x)) \,\} \end{aligned}$$

$$= \underbrace{\tfrac{1}{2}\, a_0}_{c_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \{\, \underbrace{\tfrac{1}{2}\cdot(a_k + j\cdot b_k)}_{c_{-k}} \cdot e^{-j\cdot k\cdot x} \,\} + \sum_{k=1}^{\infty} \{\, \underbrace{\tfrac{1}{2}\cdot(a_k - j\cdot b_k)}_{c_k} \cdot e^{j\cdot k\cdot x} \,\}$$

Fourier-Reihen

$$f(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [\, (c_{-k}) \cdot e^{-j\cdot k\cdot x} + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k) \cdot e^{j\cdot k\cdot x} \,]$$

$$\boxed{\mathbf{f(x)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbf{c_k \cdot e^{j\cdot k\cdot x}} \qquad \textbf{Fourier-Reihe}}$$

mit

$$c_0 = ½ \cdot a_0 = 1/(2\pi) \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = 1/(2\pi) \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{0\cdot x}\, dx$$

und

$$c_{\mp k} = (1/2) \cdot [\, \underbrace{(1/\pi) \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos(k\cdot x)\, dx}_{a_k} \pm \underbrace{(j/\pi) \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin(k\cdot x)\, dx}_{j\,\cdot\, b_k} \,]$$

$$= (1/2\pi) \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot [\, \cos(k\cdot x) \pm j \cdot \sin(k\cdot x) \,]\, dx$$

$$= 1/(2\pi) \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{\pm j\cdot k\cdot x}\, dx\,,\ k = 1, 2, 3, \ldots$$

entgegen-gesetztes Vorzeichen v. Index u. Exponent

Fourier-Reihen

Allgemeine Form der **Fourier-Koeffizienten**:

$$\boxed{c_k = 1/(2\pi) \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-j \cdot k \cdot x}\, dx} \quad k \in \mathbb{Z}$$

(d.h.: k=…, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,…)

Die Folge c_k der Fourier-Koeffizienten einer periodischen Funktion f(x) wird als **diskretes Spektrum** von f bezeichnet.

Man beachte:

- In der Fourier-Reihe $f(x)=\Sigma\ c_k \cdot e^{j \cdot k \cdot x}$ ist die Information über f(x) nur in der Größe (u. d. Anzahl) der Werte c_k enthalten;

  diese sind von x <u>un</u>abhängig (bestimmte Integrale) und bei Kenntnis einer Periode ($-\pi \leq x \leq \pi$) von f(x) berechenbar.
- Der Verlauf von f (die Werte für alle x) wird dargestellt als Summe gewichteter Sinus- / Cosinus-Schwingungen mit Perioden, d.ganzzahlige Teiler von 2π sind (2π/2,2π/3,…)
- Die komplexe Schreibweise ist kompakter; sie ändert aber nichts am reellwertigen Zusammenhang bei f(x): $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Fourier-Reihen

Beispiel: Die Koeffizienten eines Fourier-Polynoms seien:

$a_0=4; \quad a_1=0{,}2; \ b_1=0; \quad a_2=0; \ b_2=1; \quad a_i=b_i=0$ für $i>2$

d.h.:

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\, a_0 + \sum_{k=1}^{2} \{ a_k \cdot \cos(k\cdot x) + b_k \cdot \sin(k\cdot x) \}$$

$$= 4/2 + 0{,}2\cdot\cos(x) + 0\cdot\sin(x) + 0\cdot\cos(2x) + 1\cdot\sin(2x)$$

$$= 2 + 0{,}2\cdot\cos(x) + \sin(2x)$$

Komplexe Schreibweise:

$$f(x) = \sum_{k=-2}^{+2} c_k \cdot e^{j\cdot k\cdot x},$$ mit dem diskreten Spektrum:

$c_0 = \tfrac{1}{2}\cdot a_0 = 2$

$c_{-k} = \tfrac{1}{2}\cdot(a_k + j\cdot b_k) \Rightarrow c_{-1} = \tfrac{1}{2}\cdot(0{,}2+j\cdot 0) = 0{,}1; \ c_{-2} = \tfrac{1}{2}\cdot(0+j) = j/2$

$c_k = \tfrac{1}{2}\cdot(a_k - j\cdot b_k) \Rightarrow c_1 = \tfrac{1}{2}\cdot(0{,}2-j\cdot 0) = 0{,}1; \ c_2 = \tfrac{1}{2}\cdot(0-j) = -j/2$

Prof. Dr. Aris Christidis • WS 2017 / 18

Beispiel: [Forts. $f(x) = 2 + 0{,}2\cdot\cos(x) + \sin(2x)$]

diskretes Spektrum

$c_{-2} = j/2;\quad c_{-1} = 0{,}1;$

$c_0 = 2$

$c_1 = 0{,}1;\quad c_2 = -j/2$

Fourier-Reihe in komplexer Schreibweise:

$$f(x) = \sum_{k=-2}^{+2} c_k \cdot e^{j\cdot k\cdot x}$$

$$= j/2\cdot e^{-j\cdot 2\cdot x} + 0{,}1\cdot e^{-j\cdot x} + 2 + 0{,}1\cdot e^{j\cdot x} - j/2\cdot e^{-j\cdot 2\cdot x}$$

$$= j/2\cdot(\cos(2x) - j\cdot\sin(2x)) + 0{,}1\cdot(\cos(x) - j\cdot\sin(x)) + 2 + 0{,}1\cdot(\cos(x) + j\cdot\sin(x)) - j/2\cdot(\cos(2x) + j\cdot\sin(2x))$$

$$= \sin(2x)/2 + 0{,}1\cdot\cos(x) + 2 + 0{,}1\cdot\cos(x) + \sin(2x)/2$$

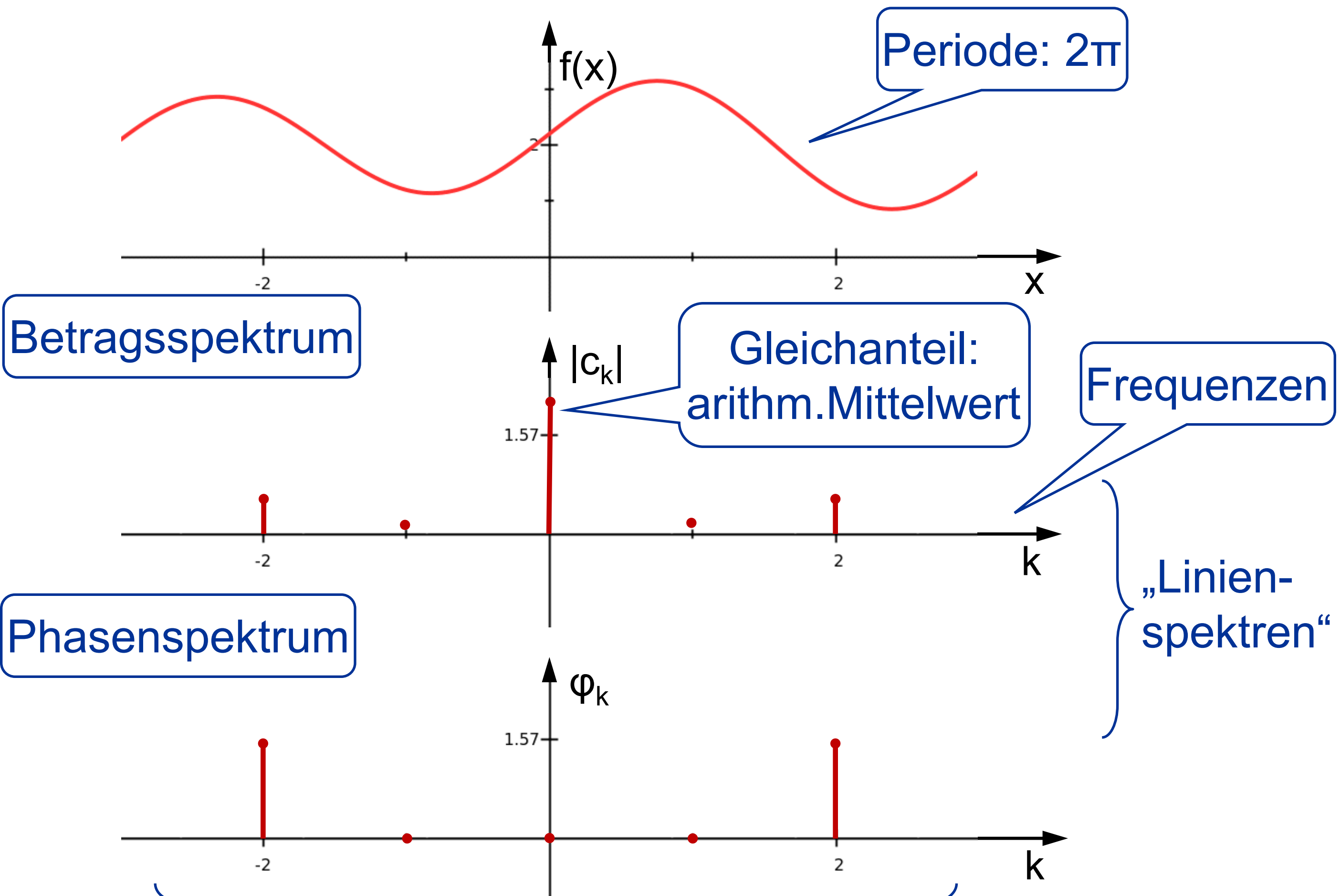
$$= \sin(2x) + 0{,}2\cdot\cos(x) + 2$$

⇨ Möglichkeit der Darstellung periodischer Funktionen über den Betrag ihres Spektrums („Betragsspektrum“)

Fourier-Reihen

Fourier-Spektren einer Funktion – z.B.:

$f(x) = 2 + 0{,}2 \cdot \cos(x) + \sin(2 \cdot x)$



reellwertige Funktionen haben symmetrische Spektren!

diskretes Spektrum

$c_{-2} = j/2;\quad c_{-1} = 0{,}1;$

$c_0 = 2$

$c_1 = 0{,}1;\quad c_2 = -j/2$

Betrag=(Re²+Im²)½

$|c_{-2}| = [0^2+(\tfrac{1}{2})^2]^{\frac{1}{2}} = 0{,}5$

$|c_{-1}| = [(0{,}1)^2+0^2]^{\frac{1}{2}} = 0{,}1$

$|c_0| = [2^2+0^2]^{\frac{1}{2}} = 2$

$|c_1| = [(0{,}1)^2+0^2]^{\frac{1}{2}} = 0{,}1$

$|c_2| = [0^2+(-\tfrac{1}{2})^2]^{\frac{1}{2}} = 0{,}5$

Phase=arctg(Im/Re)

$\arg(c_{-2}) = \pi/2$

$\arg(c_{-1}) = 0$

$\arg(c_0) = 0$

$\arg(c_1) = 0$

$\arg(c_2) = -\pi/2$