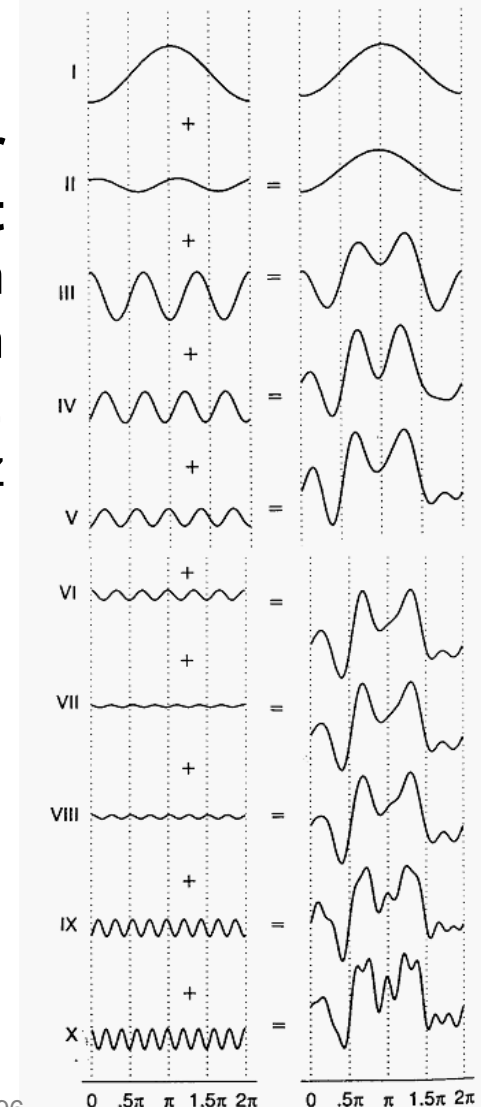
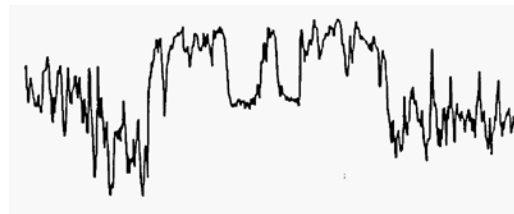


Operationen im Frequenzbereich

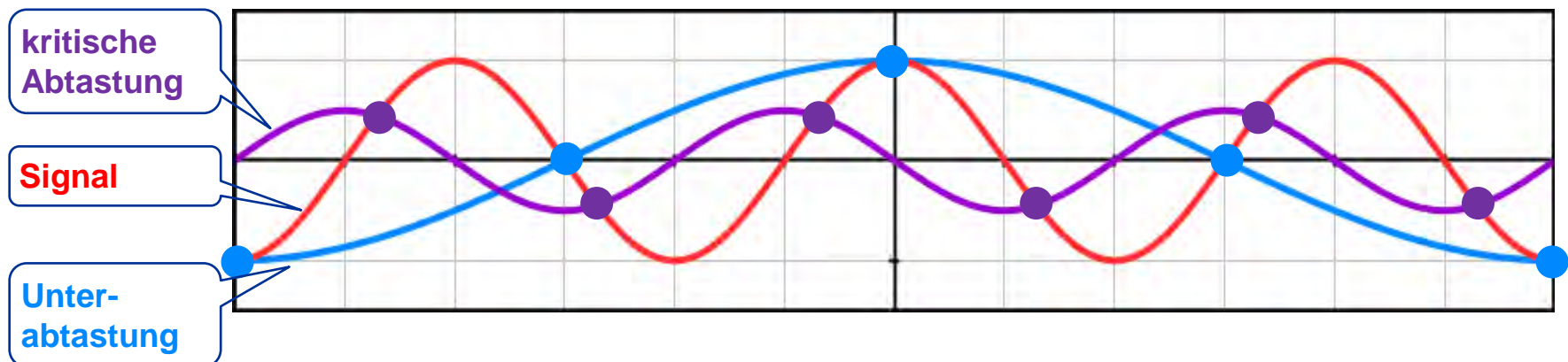
Abtasttheorem

(H.Nyquist 1928; Beweis: C.E.Shannon 1949):

Ein periodisches Signal lässt sich **aus einer endlichen Anzahl von Abtastwerten exakt** (d.h.: fehlerfrei) **rekonstruieren**. Dabei dürfen die Abtastpunkte nicht weiter auseinanderliegen als eine halbe Periode der höchsten Frequenz, die im Signal enthalten ist. Diese Grenzfrequenz wird „Nyquist-Frequenz“ genannt.

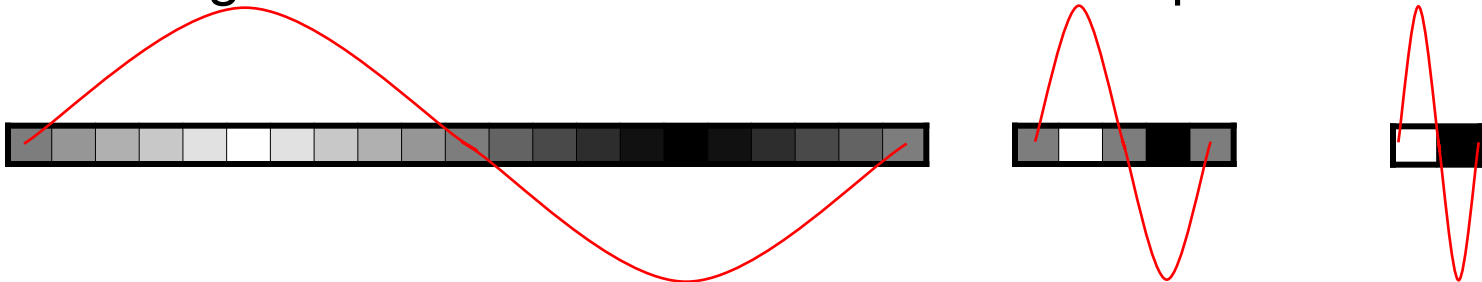


- Abtastung mit der „Nyquist-Frequenz“ ermöglicht Signal-Rekonstruktion nur, wenn Minima / Maxima erfaßt werden



- Abtastung unterhalb der Nyquist-Frequenz kann Abtastwerte ergeben, die auf eine niedrigere Frequenz schließen lassen. Diese „Maskierung“ hoher durch niedrige Frequenzen nennt man **Aliasing**.
- Linien, Objektkanten und sich perspektivisch verjüngende Strukturen sind hochfrequente, durch Aliasing gefährdete Bildregionen.

- Anwendung u. Visualisierung d. DFT in d. Bildverarbeitung wirft Frage nach den im Bild enthaltenen Frequenzen auf:



Zeilen / Spalten digitaler Bilder können (inkl. Gleichanteil) so viele Frequenzen bzw. Perioden wie Pixel enthalten.

- Angenommene Periodizität bedeutet, daß jede M Pixel eine volle Periode (bzw. der Winkel 2π) durchlaufen wird. Deshalb ist in der Literatur als Definition weit verbreitet:

$$F(u) = \sum_{x=0}^{M-1} f(x) \cdot e^{-j \cdot u \cdot x \cdot 2\pi / M}, \quad f(x) = 1/M \cdot \sum_{u=0}^{M-1} F(u) \cdot e^{j \cdot u \cdot x \cdot 2\pi / M}$$

[Diese Skalierung des Exponenten erlaubt die Angabe von x- und u-Abschnitten in Pixeln (z.B. M) statt in Winkeln (z.B. 2π).]

Beispiel: $f(x)=2+0,2\cdot\cos(x)+\sin(2x)$

Versuch einer Rekonstruktion aus 4 äquidistanten Abtastwerten:

$$g_n(x) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{k=1}^m \{ A_k \cdot \cos(k \cdot x) + B_k \cdot \sin(k \cdot x) \} + A_{n/2} \cdot \cos(x \cdot n/2)$$

[$n=4$ (gerade); $m=(n-2)/2=1$; $\sin(\pi/4)=\cos(\pi/4)=1/\sqrt{2}=w$]

$$\frac{1}{2}A_0 = (1/n) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_i = (1/4) \cdot [(3+0,2w)+(1-0,2w)+(3-0,2w + 1+0,2w)] = 2$$

x_i	$\cos(x_i)$	$\sin(2x_i)$	$y_i=f(x_i)$
$\pi/4$	w	1	$3+0,2w$
$3\pi/4$	$-w$	-1	$1-0,2w$
$5\pi/4$	$-w$	1	$3-0,2w$
$7\pi/4$	w	-1	$1+0,2w$

$$A_1 = (2/n) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot \cos(1 \cdot x_i) = (2/4) \cdot [(3+0,2w) \cdot \cos(\pi/4) + (1-0,2w) \cdot \cos(3\pi/4) + (3-0,2w) \cdot \cos(5\pi/4) + (1+0,2w) \cdot \cos(7\pi/4)] = 0,2$$

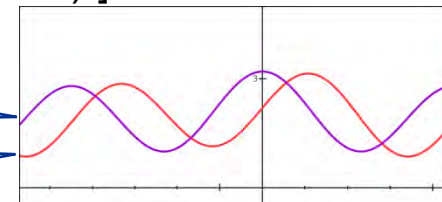
$$A_2 = (1/n) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \cdot y_i = (1/4) \cdot [(-1)^0 \cdot (3+0,2w) + (-1)^1 \cdot (1-0,2w) + (-1)^2 \cdot (3-0,2w) + (-1)^3 \cdot (1+0,2w)] = 1$$

$$B_1 = (2/n) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot \sin(1 \cdot x_i) = (2/4) \cdot [(3+0,2w) \cdot \sin(\pi/4) + (1-0,2w) \cdot \sin(3\pi/4) + (3-0,2w) \cdot \sin(5\pi/4) + (1+0,2w) \cdot \sin(7\pi/4)] = 0$$

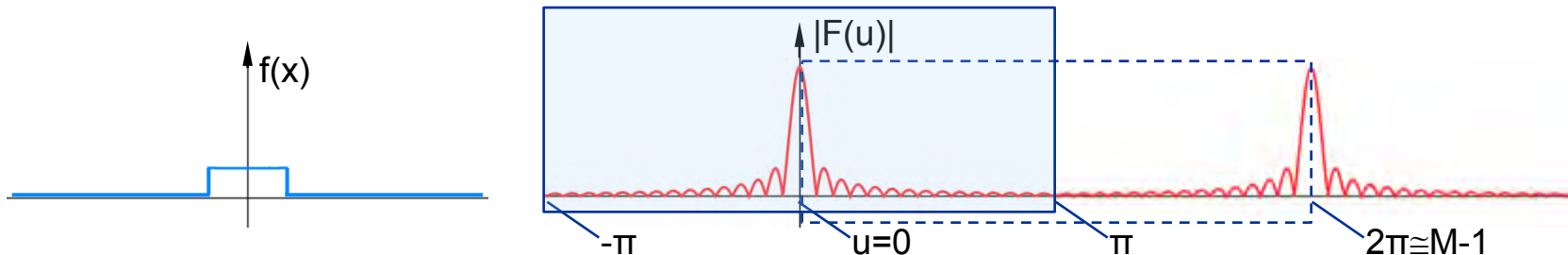
$\Rightarrow g_6(x) = 2 + 0,2 \cdot \cos(x) + 1 \cdot \cos(2 \cdot x) \Rightarrow$ verfehlt!

$$2+0,2 \cdot \cos(x)+\cos(2x)$$

$$2+0,2 \cdot \cos(x)+\sin(2x)$$



- Vor allem der Betrag der DFT bietet sich als effizientes Werkzeug zur Erkennung von **Objekten**, aber auch von niederfrequenten (z.B. Unschärfe) und hochfrequenten (Fabrikationsfehler, Rauschen) **Störungen** in einem Bild.



Zur leichteren Orientierung wird meist die berechnete periodische $F(u)$ im Bereich $-\pi \leq u \leq \pi$ dargestellt, also mit $-M/2 \leq u \leq M/2$ (statt $0 \leq u \leq M-1$), indem die DFT um $-\pi$ (d.h. um $-M/2$) versetzt wird. ($F(0,0)$ liegt in der Mitte.)

Dies kann rechnerisch schon im Ortsbereich, noch vor der Transformation bewerkstelligt werden:

- Verschiebung im Frequenzbereich um $-\pi$ (s.o.) entspricht:

$$\begin{aligned} F(u-\pi) & \bullet \text{---} \circ & f(x) \cdot e^{j \cdot x \cdot \pi}, & x=0, 1, \dots, M-1 \\ & & = f(x) \cdot \left\{ \underbrace{\cos(x \cdot \pi)}_{= (-1)^x} + j \cdot \underbrace{\sin(x \cdot \pi)}_{= 0} \right\} \\ & & = f(x) \cdot (-1)^x \end{aligned}$$

- Forderung: Einsatz geradzahliger Anzahl v. Abtastwerten, damit auch halbe Perioden ($M/2$ Pixel) ganzzahlig sind.
- Bei Verwendung ausschließlich von Abtastwerten, deren Anzahl eine Zweierpotenz ist, kann die Schnelle Fourier-Trf. (engl. *Fast Fourier Transform*) FFT eingesetzt werden (James Cooley, John W. Tukey, 1965).

Sie reduziert die Rechenzeit von $O(n^2)$ auf $O(n \cdot \log n)$.

[Bei Bildern: $n=M \cdot N$]

- DFT-Erweiterung auf 2D durch Interpretation von Bild-Zeilen bzw. -Spalten als unabhängig voneinander abgetastete Funktionen mit M bzw. N Werten (Pixeln):

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \cdot e^{-j \cdot (u \cdot x + v \cdot y)}$$

$$(u=0,1,\dots,M-1; \\ v=0,1,\dots,N-1)$$

$$f(x,y) = 1/(M \cdot N) \cdot \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) \cdot e^{j \cdot (u \cdot x + v \cdot y)}$$

$$(x=0,1,\dots,M-1; \\ y=0,1,\dots,N-1)$$

[in der Fachliteratur meist mit $e^{\pm j \cdot 2\pi \cdot (u \cdot x/M + v \cdot y/N)}$ dargestellt]

Häufig genutzte Größen und Darstellungen:

- (Betrags-)Spektrum: $|F(u,v)| = [\text{Re}^2(u,v) + \text{Im}^2(u,v)]^{1/2}$
- Leistungsspektrum: $P(u,v) = |F(u,v)|^2 = \text{Re}^2(u,v) + \text{Im}^2(u,v)$
- Phase: $\varphi(u,v) = \arctg [\text{Im}(u,v) / \text{Re}(u,v)]$

Operationen im Frequenzbereich

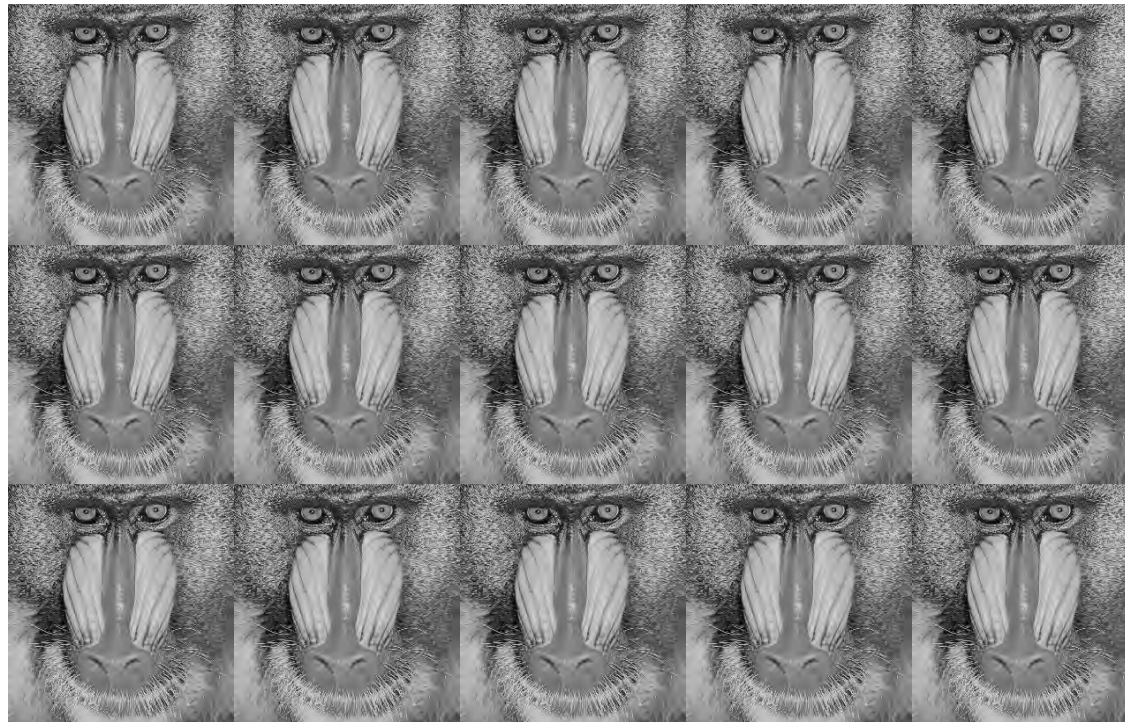
Voraussetzung für d. Anwendbarkeit d. DFT in d. Bildverarbeitung:

Periodizität des Motivs – i.d.R. nicht gegeben

Abhilfe: Bild wird betrachtet als Einzel-Periode eines sich ins Unendliche wiederholenden, kontinuierlichen Musters.

(...)

(...)



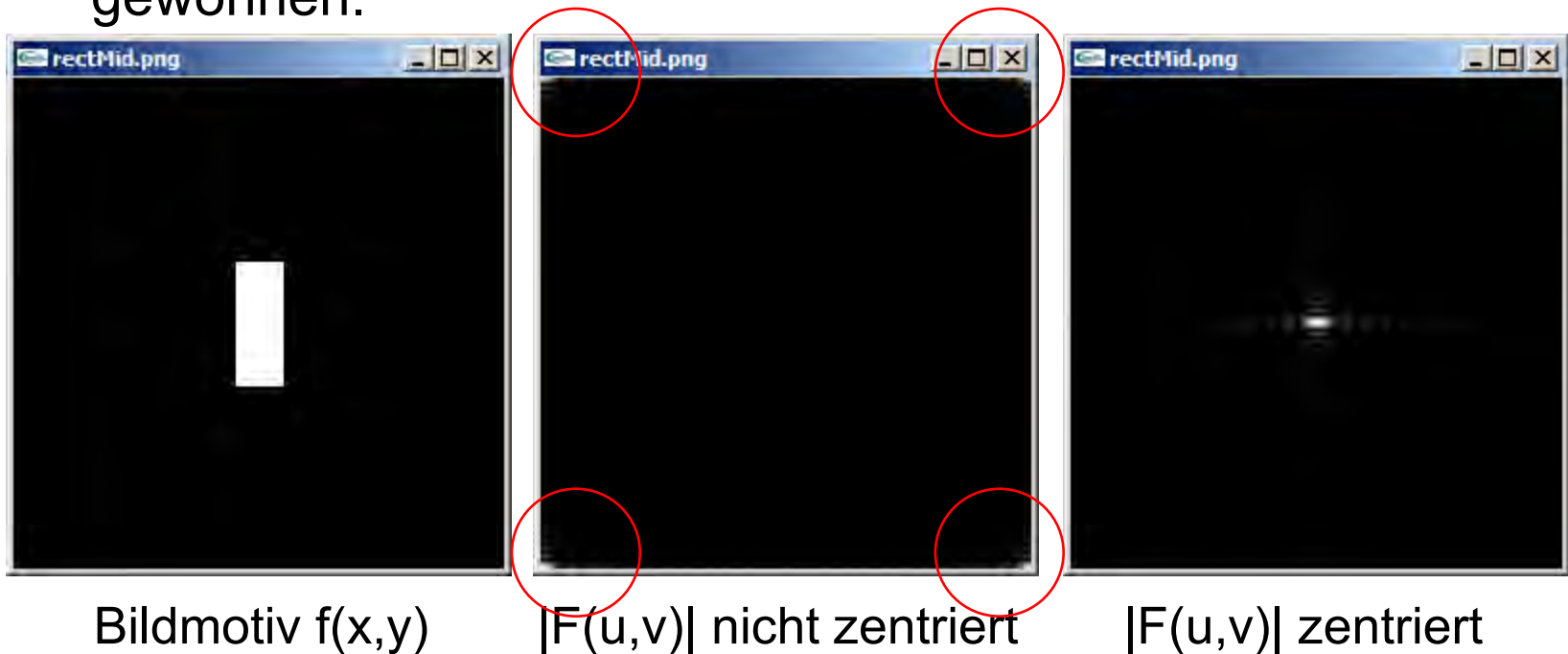
(...)

(...)

„Nahtstellen“ werden ggf. durch Umrahmung überwunden.

Implementierungshinweise:

- Die DFT wird auf monochrome Bilder bzw. auf jeweils eine Farbkomponente angewandt.
- Das um die Bildmitte zentrierte Spektrum von $f(x,y)$ wird durch DFT des Produktes $f(x,y) \cdot (-1)^{x+y}$ und Betragsbildung gewonnen.

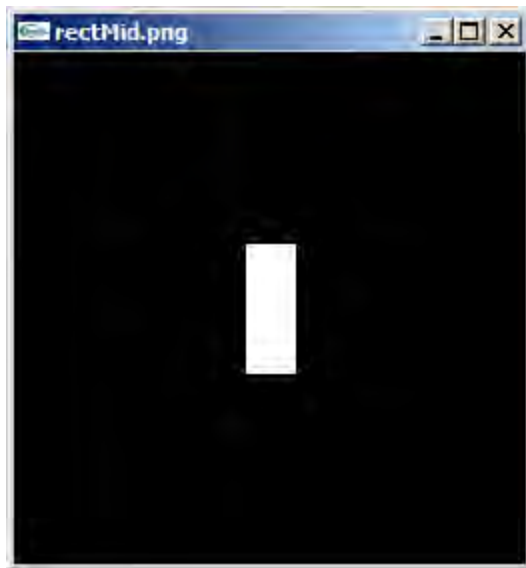


Implementierungshinweise (2):

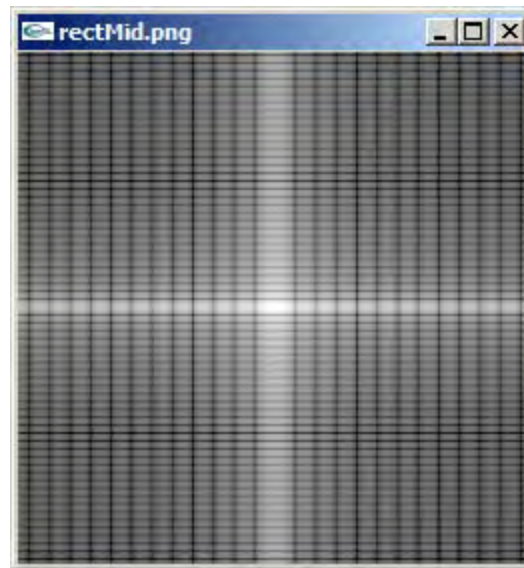
- Die Dominanz des Gleichanteils läßt die übrigen Werte im visualisierten Spektrum $|F(u,v)|$ i.d.R. zu dunkel erscheinen

Abhilfe: logarithmische Darstellung:

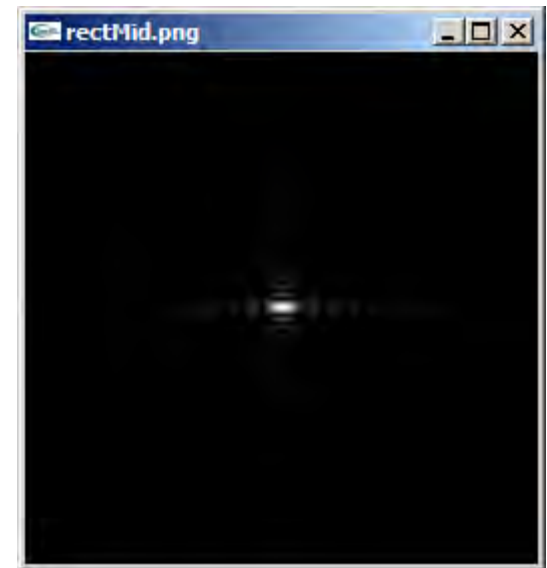
$$G(x,y) = c \cdot \log(1 + |F(u,v)|) , c = \text{const. (wählbar)}$$



Bildmotiv $f(x,y)$



$c \cdot \log(1 + |F(u,v)|)$

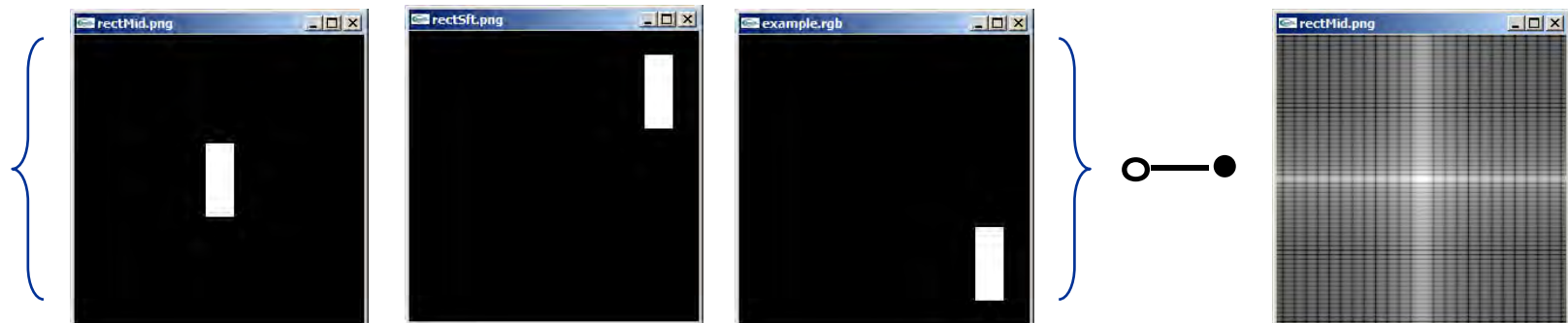


$|F(u,v)|$ zentriert

Implementierungshinweise (3):

- Aus $f(x-\alpha) \circ \longrightarrow \bullet F(u) \cdot e^{-j \cdot u \cdot \alpha}$ ergibt sich, daß Verschiebung eines Bildmotivs um α keine Änderung in $|F(u)|$ bewirkt:
 $|e^{-j \cdot u \cdot \alpha}| = [\cos^2(u \cdot \alpha) + \sin^2(u \cdot \alpha)]^{1/2} = 1$
- Da reellwertige Funktionen symmetrische Fourier-Spektren haben (s.o.), also: $\mathcal{F} \{ f(-x) \} = \mathcal{F} \{ f(x) \}$, folgt daraus, daß Funktionen $f(x)$, $f(x-\alpha)$ und $f(\alpha-x)$ das gleiche Spektrum $|F(u)|$ haben (bei unterschiedlicher Phase).

In Systemen, die Bilder „kopfunter“ speichern (unterste Zeile zuerst), ist daher keine Umspeicherung nötig.

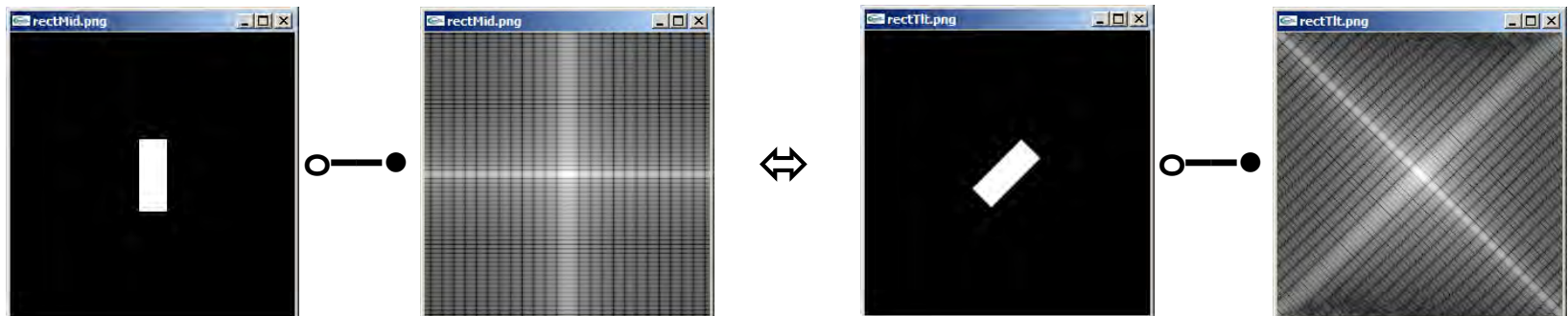


Nach erfolgter Implementierung bestätigt sich die Konsequenz einer Bilddrehung für das Fourier-Spektrum:

Unter Nutzung von Polarkoordinaten ($x=r \cdot \cos\theta$, $y=r \cdot \sin\theta$, $u=\omega \cdot \cos\varphi$, $v=\omega \cdot \sin\varphi$) gelangt man schließlich zur Aussage:

$$f(r, \theta) \text{ o---} \bullet F(\omega, \varphi) \Leftrightarrow f(r, \theta + \theta_0) \text{ o---} \bullet F(\omega, \varphi + \theta_0)$$

Das bedeutet, daß eine Drehung des Bildes $f(x,y)$ um den Winkel φ zur gleichen Drehung bei $|F(u,v)|$ führt.



Implementierungshinweis:

- Rundungsfehler können bewirken, daß bei der Rücktransformation eines Bildes (meist kleine) negative Werte entstehen.

Eine Zuweisung negativer Werte vorzeichenlosen, ganzzahligen Variablen erzeugt hohe positive Werte.

Beispiel: Nach der Sequenz

```
float x=-1.1;
```

```
unsigned int uipixel=(unsigned int)x;
```

```
unsigned char *pixel=(unsigned char *)&uipixel;
```

hat `uipixel` den (max.erreichbaren) Wert 4.294.967.295
und jede der vier Variablen `pixel[]` den Wert 255.

Abhilfe (bezogen auf monochrome Bilder):

Bildung von `MIN(255, MAX(0, x))`.

Operationen im Frequenzbereich

- Die wichtigsten Fourier-Anwendungen beruhen auf der Entsprechung zwischen der Faltung im Ortsbereich und der Multiplikation im Frequenzbereich (Faltungssatz):

$$f(x) * h(x) \longleftrightarrow H(u) \cdot F(u)$$

Zur elementweisen Multiplikation erfährt die (kleinere) Filter-Funktion (Maske) eine „Auffüllung“ mit Nullen auf die Größe des Bildes (engl. „*Padding*“: „Wattieren“).

Hierbei können Bild und Maske wahlweise (dann aber einheitlich) ihren Ursprung in der Mitte (zentriert) oder in der oberen linken Ecke der eigenen Bereiche haben.



Laplace-
Operator

*

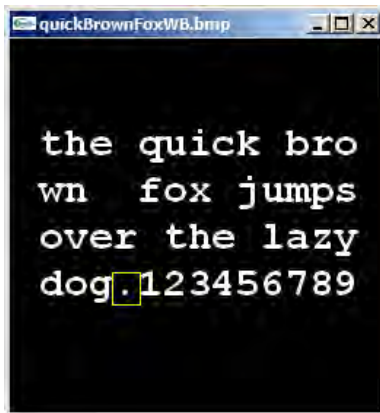
	1	
1	-4	1
	1	

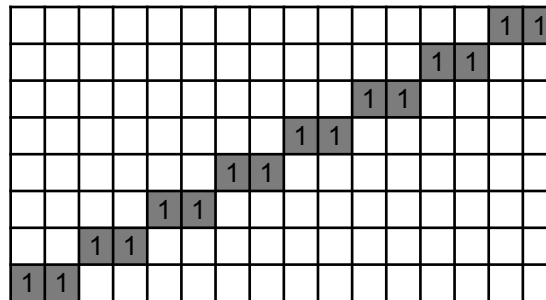
=



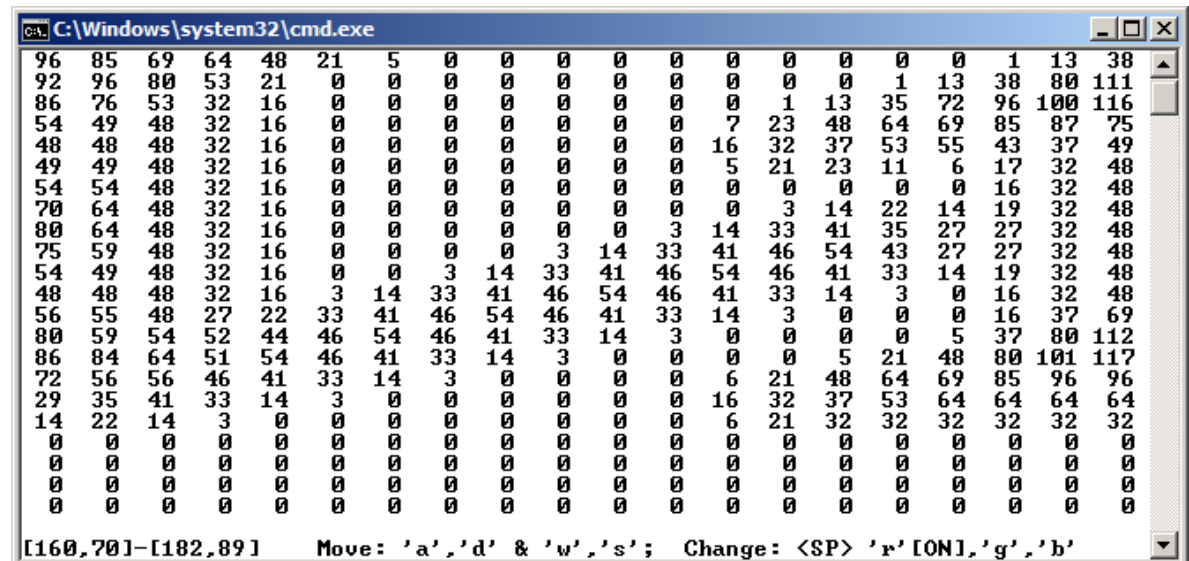
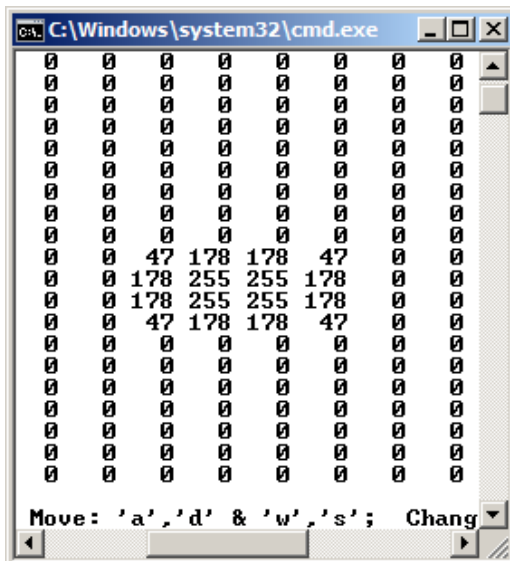
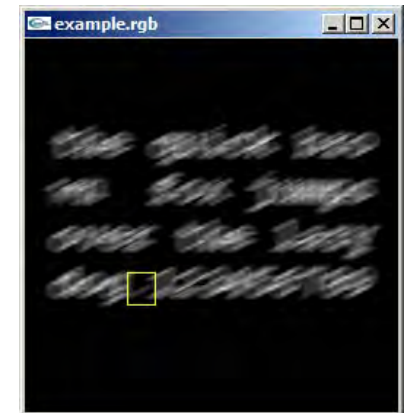
Operationen im Frequenzbereich

- Entsprechend: FFT-Faltung mit 8x16-PSF





11

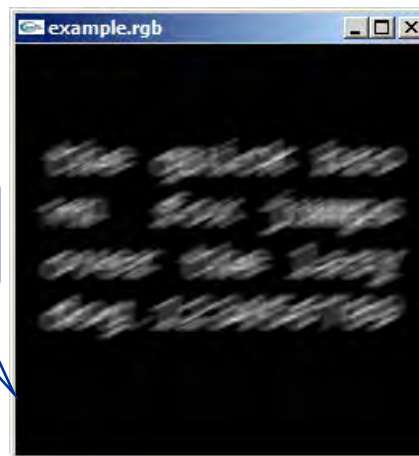


Operationen im Frequenzbereich

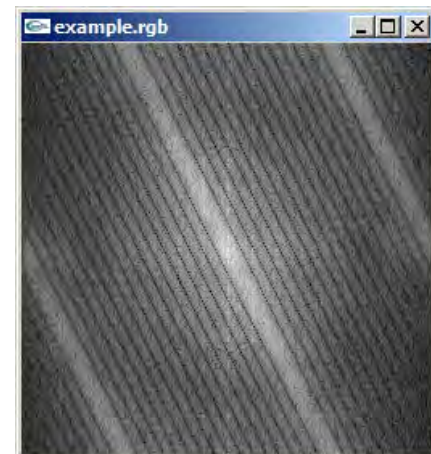
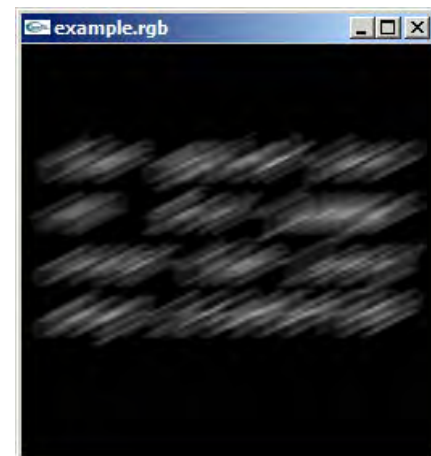
Bei Unschärfe läßt sich im Spektrum die überlagerte PSF-Transformierte erkennen – bei Bewegung: die Rechteck-Fkt.



8x16-
PSF



16x32-
PSF



- Bei Kenntnis der Verschmierungsfunktion (PSF) kann, umgekehrt, d. ungestörte Bild mit elementweise Division d. Fourier-Transformierten gewonnen werden (Invers-Filter):

$$g(x,y) = \mathcal{F}^{-1} \{ F(u,v) \cdot H(u,v) \}$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \mathcal{F}^{-1} \{ G(u,v) / H(u,v) \}, \text{ mit:}$$

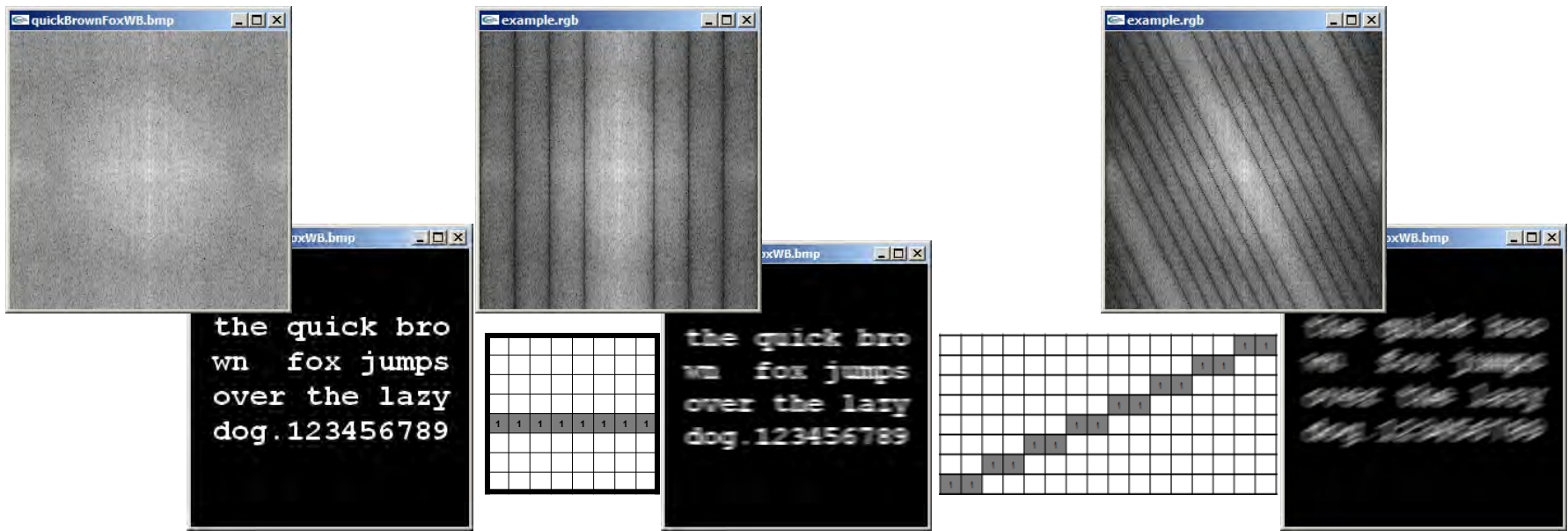
$$\text{Re}\{f(x,y)\} = \frac{\text{Re}\{G(u,v)\} \cdot \text{Re}\{H(u,v)\} + \text{Im}\{G(u,v)\} \cdot \text{Im}\{H(u,v)\}}{\text{Re}^2\{H(u,v)\} + \text{Im}^2\{H(u,v)\}}$$

$$\text{Im}\{f(x,y)\} = \frac{\text{Im}\{G(u,v)\} \cdot \text{Re}\{H(u,v)\} - \text{Re}\{G(u,v)\} \cdot \text{Im}\{H(u,v)\}}{\text{Re}^2\{H(u,v)\} + \text{Im}^2\{H(u,v)\}}$$

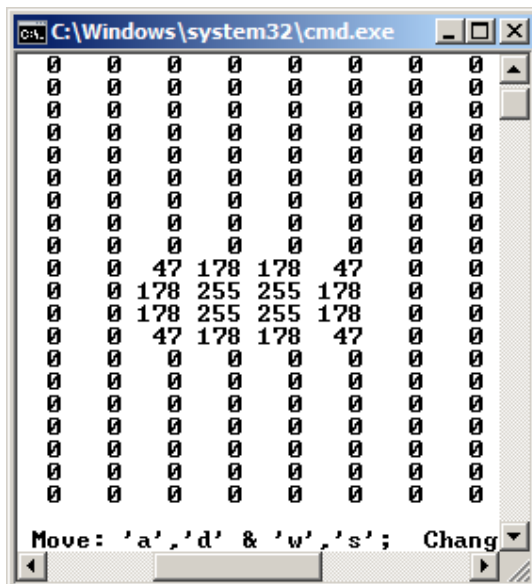
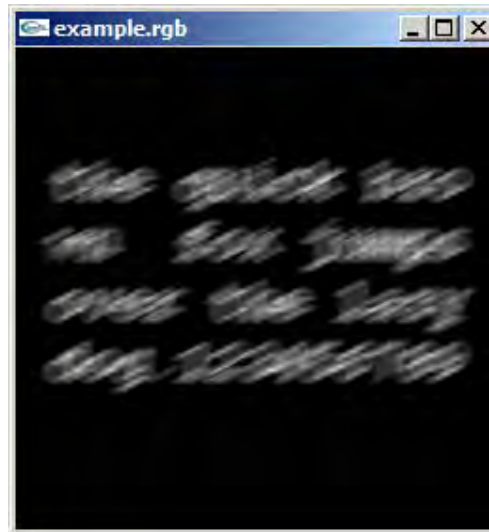
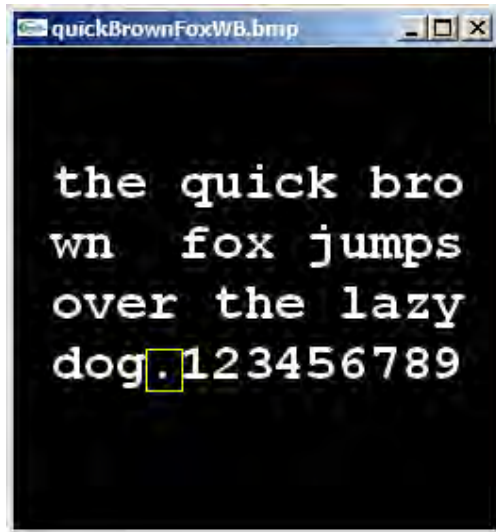
[Division komplexer Zahlen nach Erweiterung durch die konjugiert Komplexe des Nenners: $(a + A \cdot j) \cdot (b - B \cdot j) = a \cdot b + A \cdot B + j \cdot (A \cdot b - a \cdot B)$]

Zur Filterung im Frequenzbereich

- ist die explizite Lösung der dazugehörigen Integralgleichung im Ortsbereich unnötig (und meist unbekannt);
- erfolgt die Ermittlung der PSF meist durch Auswertung des Spektrums; darin ist $f(x,y)$ und $h(x,y)$ abgebildet;
- gehört der Umgang mit dem Problem möglicher Null-Divisionen zum Filterdesign (empfohlener Minimal-Divisor: $\varepsilon=0,00015$).

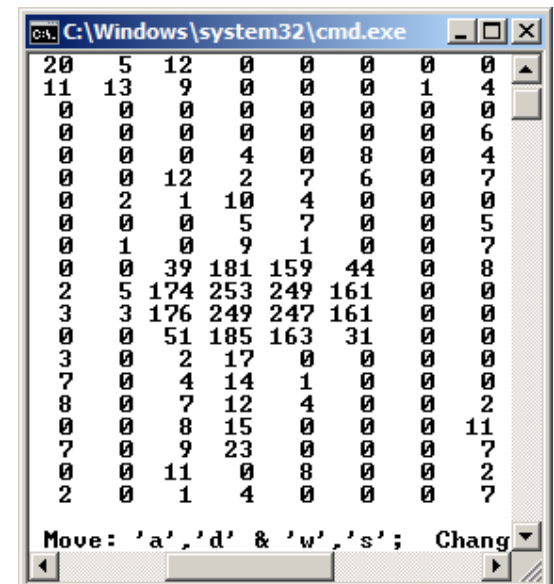


Operationen im Frequenzbereich

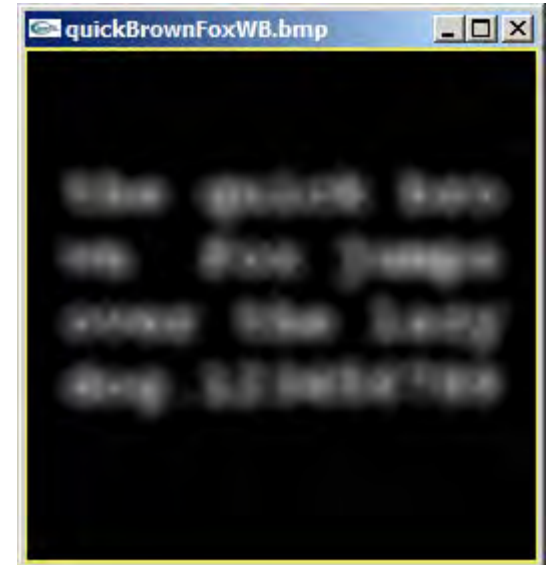
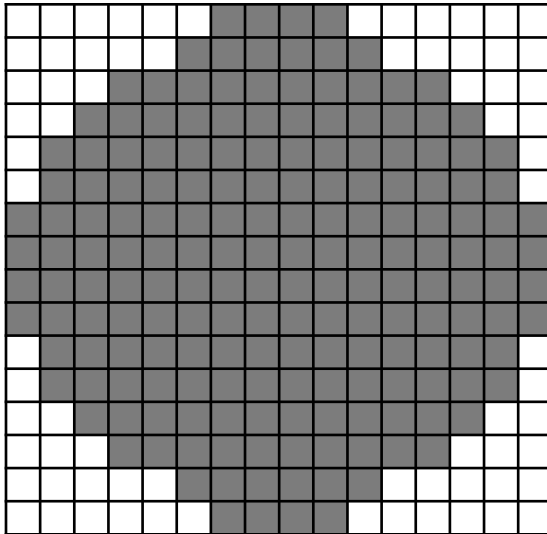


Verschmierung mit 8x16 PSF

Restaurierung mit inverser Filterung



Operationen im Frequenzbereich



Empfindlichkeit der
invers. Filterung auf
Störungen

(hier: Defokussierung
mit 16x16-PSF;

inverse Filterung /

Histogramm-Rahmen)

