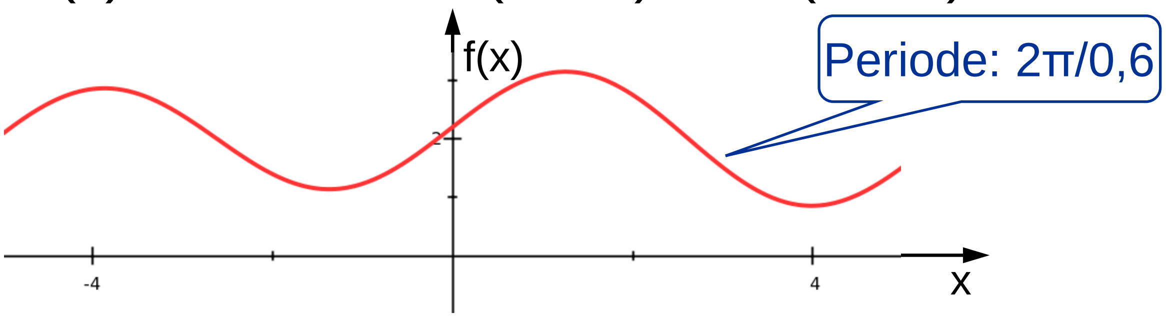
Fourier-Transformation

Mit dem bisherigen Fourier-Polynom nicht darstellbar – z.B.:

$f(x) = 2 + 0{,}2 \cdot \cos(0{,}6 \cdot x) + \sin(1{,}2 \cdot x)$



Erfassung von Perioden, die nicht ganzzahlige Teiler $2\pi/k$, $k \in \mathbb{N}$, sondern v. beliebiger Länge $\in \mathbb{R}$ sind, führt zum (nicht-abzählbaren) Kontinuum von Perioden im Intervall $(-\infty\ ,\ +\infty)$.

(Perioden $\rightarrow \infty$ kennzeichnen nichtperiodische Funktionen!)

Umbenennungen – häufig: $k \rightarrow u = \int du$; $c_k \rightarrow F(u)$, $u \in \mathbb{R}$

Aus den Linienspektren werden kontinuierliche Spektren.

Aus der Fourier-Reihe $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \cdot e^{j \cdot k \cdot x}$ wird ein Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} du$:

Fourier-Transformation

Fourier-Reihendarstellung von f(x):

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left[1/(2\pi) \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-j \cdot k \cdot x}\, dx \right]}_{c_k} \cdot e^{j \cdot k \cdot x}$$

Das **Fourier-Integral** erfaßt beliebige Perioden: $\int_{-\pi}^{\pi} dx \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} dx$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[1/(2\pi) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{-j \cdot u \cdot x}\, dx \right] \cdot e^{j \cdot u \cdot x}\, du$$

$$f(x) = 1/(2\pi) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{-j \cdot u \cdot x}\, dx}_{F(u)} \right] \cdot e^{j \cdot u \cdot x}\, du$$

Die Funktion $\boxed{\mathbf{F(u)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f(x)} \cdot \mathbf{e}^{-j \cdot u \cdot x}\, \mathbf{dx}}$

wird die **Fourier-Transformierte** oder **Spektralfunktion** von f(x) genannt; analog ist f(x) die **Rücktransformierte** zu F(u).

Fourier-Transformation

Anmerkungen zu Fourier:

- Fourier-Transformation u. inverse Fourier-Transformation

$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{-j \cdot u \cdot x}\, dx$	$f(x) = 1/(2\pi) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) \cdot e^{j \cdot u \cdot x}\, du$

  unterscheiden sich hauptsächlich im Vorzeichen des Exponenten (und allenfalls in einem konstanten Faktor)

- Notation für die Fourier-Transformation von f(x):

  $F(u) = \mathscr{F}\{ f(x) \}$; $f(x) = \mathscr{F}^{-1}\{ F(u) \}$

  f(x) **o**—● F(u) bilden ein Transformationspaar

  [in der engl. Literatur auch: f(x) ⇔ F(u)]

- Der Faktor (1/2π) wird in der Literatur uneinheitlich behandelt: Oft wird er der Transformierten zugeordnet, o. beiden Funktionen wird der Faktor $(1/2\pi)^{1/2}$ vorangestellt.

  Wichtig ist, daß schließlich gilt: $\mathscr{F}^{-1}\{ \mathscr{F}\{ f(x) \} \} = f(x)$

Anmerkungen zu Fourier (2):

- Der Definitionsbereich der Ursprungsfunktion heißt auch **Ortsbereich**, jener d. Transformierten **Frequenzbereich**.
- Mit der Fourier-**Reihe** können **nur periodische**, mit der Fourier-Transformation auch nichtperiodische Funktionen (genauer: mit unendlicher Periode) beschrieben werden

  (vgl.: Nachkommastellen von π aufgefaßt als „Periode“).
- Voraussetzungen für die Existenz von F(u) ist, daß f(x) stückweise stetig und absolut integrierbar ist.

  Die Bedingungen für die Existenz und Berechnung von F(u) waren bis in das 20. Jh. Forschungsgegenstand.
- Spektren geben Auskunft darüber, mit welchen Amplituden und Phasen die einzelnen harmonischen **Schwingungen als „Bausteine“** am Aufbau des Signals f(x) beteiligt sind.

Anmerkungen zu Fourier (3):

- Anschauliche Analogie: Die Fourier-Transformation als „mathematisches **Prisma**“, das die frequenzabhängigen Bestandteile einer einheitlichen Erscheinung erkennbar macht (Licht / math. Funktion).
- Die komplexe Schreibweise erlaubt die Anwendung auf beliebige **komplexe Funktionen** ($f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$)
- In der Regel liegen die zu approximierenden Funktionen nicht als Funktionen, sondern als **gemessene** Wertepaare vor; die Fourier-Koeffizienten werden dann numerisch näherungsweise daraus ermittelt.
- Die Fourier-Transformierten reeller, **gerader** Funktionen [f(-x) = f(x)] sind auch **reell** und **gerade** (nur cos-Anteile).

  Die Fourier-Transformierten reeller **ungerader** Funktionen [f(-x) =-f(x)] sind **imaginär** u. **ungerade** (nur sin-Anteile).

Fourier-Transformation

- Berechnung des Fourier-Polynoms $g_n(x)$ einer gesuchten periodischen Funktion $y=f(x)$ aus n äquidistanten x-Werten und den dazugehörigen y-Werten einer Periode:

$$g_n(x) = \tfrac{1}{2} A_0 + \sum_{k=1}^{m} \{A_k \cdot \cos(k \cdot x) + B_k \cdot \sin(k \cdot x)\} + \overbrace{A_{n/2} \cdot \cos(x \cdot n/2)}^{\text{entfällt für } n=2m+1}$$

Anzahl m ermittelter Vielfacher der Grundfrequenz:

$m=(n-2)/2$, falls $n=2m$; $m=(n-1)/2$, falls $n=2m+1$ ($m \in N$)

$$\tfrac{1}{2} A_0 = (1/n) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_i$$

$$A_k = (2/n) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot \cos(k \cdot x_i)$$

$$A_{n/2} = (1/n) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i} \cdot y_i$$

entfällt für n=2m+1

$$B_k = (2/n) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot \sin(k \cdot x_i)$$

Die Näherung minimiert die Summe der Abweichungs-quadrate einer unbekannten $f(x)$ und $g_n(x)$ [ohne Beweis].

x_i	$\cos(2x_i)$	$y_i=f(x_i)$
0	1	2,2
π/2	-1	1,8
π	1	2,2
3π/2	-1	1,8

Beispiel: Rekonstruktion von $\mathbf{f(x) = 2 + 0{,}2\cdot\cos(2x)}$ aus 4 äquidistanten Funktionswerten (Abtastwerten)

$$g_n(x) = \tfrac{1}{2} A_0 + \sum_{k=1}^{m} \{ A_k\cdot\cos(k\cdot x) + B_k\cdot\sin(k\cdot x) \} + A_{n/2}\cdot\cos(x\cdot n/2)$$

[n=4 (gerade); m=(n-2)/2=1]

$$\tfrac{1}{2}\mathbf{A_0} = (1/n)\cdot\sum_{i=0}^{n-1} y_i = (1/4)\cdot[2{,}2+1{,}8+2{,}2+1{,}8] \mathbf{= 2}$$

$$\mathbf{A_1} = (2/n)\cdot\sum_{i=0}^{n-1} y_i\cdot\cos(1\cdot x_i) = (2/4)\cdot[2{,}2\cdot\cos(0)+1{,}8\cdot\cos(\pi/2)+2{,}2\cdot\cos(\pi)+1{,}8\cdot\cos(3\pi/2)] \mathbf{= 0}$$

$$\mathbf{A_2} = (1/n)\cdot\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\cdot y_i = (1/4)\cdot[(-1)^0\cdot 2{,}2 + (-1)^1\cdot 1{,}8 + (-1)^2\cdot 2{,}2 + (-1)^3\cdot(1{,}8) \mathbf{= 0{,}2}$$

$$\mathbf{B_1} = (2/n)\cdot\sum_{i=0}^{n-1} y_i\cdot\sin(1\cdot x_i) = (2/4)\cdot[2{,}2\cdot\sin(0)+1{,}8\cdot\sin(\pi/2)+2{,}2\cdot\sin(\pi)+1{,}8\cdot\sin(3\pi/2)] \mathbf{= 0}$$

$$\Rightarrow \mathbf{g_4(x) = 2 + 0{,}2 \cdot \cos 2(x)}$$

d.h.: f(x) ist rekonstruiert!

Beispiel: Rekonstruktion v. **$f(x)=2+0{,}2\cdot\cos(x)+\sin(2x)$** aus 6 äquidistanten Funktionswerten (Abtastwerten)

x_i	$\cos(x_i)$	$\sin(2x_i)$	$y_i=f(x_i)$
0	1	0	2,2
π/3	0,5	w	2,1+w
2π/3	-0,5	-w	1,9-w
π	-1	0	1,8
4π/3	-0,5	w	1,9+w
5π/3	0,5	-w	2,1-w

$$g_n(x) = ½\, A_0 + \sum_{k=1}^{m} \{ A_k\cdot\cos(k\cdot x) + B_k\cdot\sin(k\cdot x) \} + A_{n/2}\cdot\cos(x\cdot n/2)$$

[n=6 (gerade); m=(n-2)/2=2; $\sin(2\pi/3)=-\sin(4\pi/3)=\sqrt{3}/2=$ w]

$$\mathbf{½A_0} = (1/n)\cdot\sum_{i=0}^{n-1} y_i = (1/6)\cdot[2{,}2+(2{,}1+w)+(1{,}9-w)+1{,}8+(1{,}9+w)+(2{,}1-w)]$$

$$\mathbf{= 2}$$

$$\mathbf{A_1} = (2/n)\cdot\sum_{i=0}^{n-1} y_i\cdot\cos(1\cdot x_i) = (2/6)\cdot[\, 2{,}2\cdot\cos(0) + (2{,}1+w)\cdot\cos(\pi/3) + (1{,}9-w)\cdot\cos(2\pi/3) + 1{,}8\cdot\cos(\pi) + (1{,}9+w)\cdot\cos(4\pi/3) + (2{,}1-w)\cdot\cos(5\pi/3)\,]$$

$$\mathbf{= 0{,}2}$$

$$\mathbf{A_2} = (2/n)\cdot\sum_{i=0}^{n-1} y_i\cdot\cos(2\cdot x_i) = (2/6)\cdot[\, 2{,}2\cdot\cos(0) + (2{,}1+w)\cdot\cos(2\pi/3) + (1{,}9-w)\cdot\cos(4\pi/3) + 1{,}8\cdot\cos(6\pi/3) + (1{,}9+w)\cdot\cos(8\pi/3) + (2{,}1-w)\cdot\cos(10\pi/3)]$$

$$\mathbf{= 0}$$

$$\mathbf{A_3} = (1/n)\cdot\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i\cdot y_i = (1/6)\cdot[(-1)^0\cdot 2{,}2 + (-1)^1\cdot(2{,}1+w) + (-1)^2\cdot(1{,}9-w) + (-1)^3\cdot(1{,}8) + (-1)^4\cdot(1{,}9+w) + (-1)^5\cdot(2{,}1-w)] \;\mathbf{= 0}$$

Fourier-Transformation

x_i	$\cos(x_i)$	$\sin(2x_i)$	$y_i=f(x_i)$
0	1	0	2,2
π/3	0,5	w	2,1+w
2π/3	-0,5	-w	1,9-w
π	-1	0	1,8
4π/3	-0,5	w	1,9+w
5π/3	0,5	-w	2,1-w

Beispiel: (Forts.) $f(x)=2+0{,}2\cdot\cos(x)+\sin(2\cdot x)$

aus 6 äquidistanten Funktionswerten (Abtastwerten)

$$g_n(x) = \tfrac{1}{2} A_0 + \sum_{k=1}^{m} \{ A_k\cdot\cos(k\cdot x) + B_k\cdot\sin(k\cdot x) \} + A_{n/2}\cdot\cos(x\cdot n/2)$$

$$g_6(x) = \tfrac{1}{2} A_0 + \sum_{k=1}^{2} \{ A_k\cdot\cos(k\cdot x) + B_k\cdot\sin(k\cdot x) \} + A_3\cdot\cos(3x)$$

$$\mathbf{B_1} = (2/n)\cdot\sum_{i=0}^{n-1} y_i\cdot\sin(1\cdot x_i) = (2/6)\cdot[\, 2{,}2\cdot\sin(0) +(2{,}1+w)\cdot\sin(\pi/3) +(1{,}9-w)\cdot\sin(2\pi/3) + 1{,}8\cdot\sin(\pi) +(1{,}9+w)\cdot\sin(4\pi/3) +(2{,}1-w)\cdot\sin(5\pi/3)\,]$$

$$\mathbf{= 0}$$

$$\mathbf{B_2} = (2/n)\cdot\sum_{i=0}^{n-1} y_i\cdot\sin(2\cdot x_i) = (2/6)\cdot[\, 2{,}2\cdot\sin(0) +(2{,}1+w)\cdot\sin(2\pi/3) +(1{,}9-w)\cdot\sin(4\pi/3) +1{,}8\cdot\sin(6\pi/3) +(1{,}9+w)\cdot\sin(8\pi/3) +(2{,}1-w)\cdot\sin(10\pi/3)]$$

$$\mathbf{= 1}$$

$$\Rightarrow \mathbf{g_6(x) = 2 + 0{,}2 \cdot \cos(x) + 1 \cdot \sin(2\cdot x)}$$

d.h.: f(x) ist rekonstruiert!

Fourier-Transformation

Prof. Dr. Aris Christidis • WS 2017 / 18

$\int e^{ax}\, dx = (1/a) \cdot e^{ax}$
$e^{j\varphi} - e^{-j\varphi} = 2 \cdot j \cdot \sin\varphi$

Beispiele reeller, gerader Funktionen:

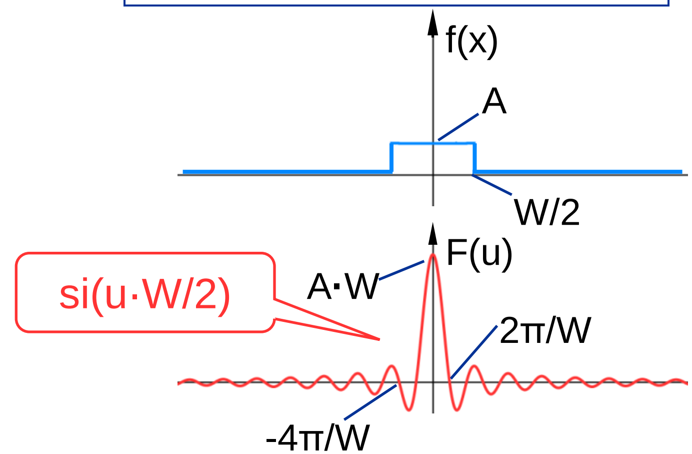
- Rechteck-Funktion: $f(x) = \begin{cases} A & \text{für } |x| \le W/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$$F(u) = \mathscr{F}\{\,\mathrm{rect}(x)\,\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{-j \cdot u \cdot x} dx$$

$$= [A/(-j \cdot u)] \cdot [e^{-juW/2} - e^{juW/2}]$$

$$= A \cdot 2 \cdot j \cdot \sin(u \cdot W/2)/(j \cdot u)$$

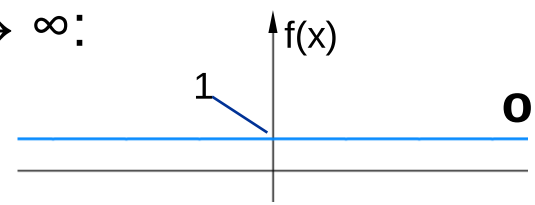
$$= A \cdot W \cdot \sin(u \cdot W/2)/(u \cdot W/2)$$



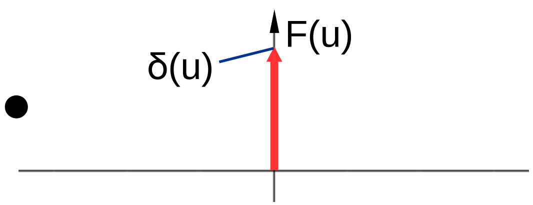
- Daraus, für A=1, $W \rightarrow \infty$:

$f(x) = 1$

$F(u) = \delta(x)$



o––●

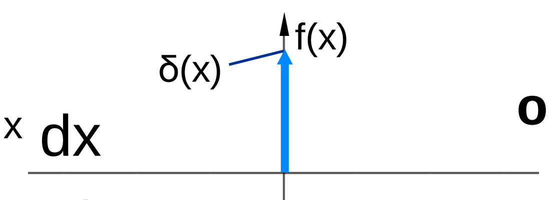


- $f(x) = \delta(x)$

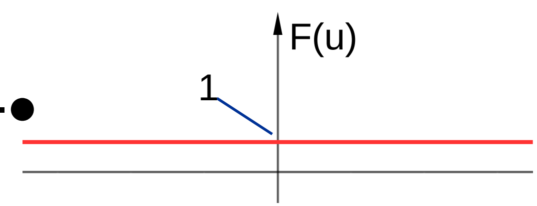
$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \cdot e^{-j \cdot u \cdot x}\, dx$

$= [e^{-j \cdot u \cdot x}]_{x=0} = e^0 = 1$

Siebeigenschaft



o––●



Anmerkungen zu Fourier (4):

- **Reziprozität** zw. den Perioden der Transformationspaare:

  Schnelle Veränderungen im Ortsbereich entsprechen langsamen im Frequenzbereich und umgekehrt.

- Funktionen, deren Transformierte außerhalb eines Intervalls $[-u_{max}, u_{max}]$ verschwinden, heißen <u>bandbegrenzt</u>.

  Bandbegrenzte Funktionen sind immer im Bereich $(-\infty, +\infty)$ definiert; umgekehrt sind Funktionen mit endlichem Definitionsbereich niemals bandbegrenzt.

- Eine Konsequenz der entgegengesetzten Exponenten-Vorzeichen in d. Hin- u. d. Rücktransformation ist, daß die Fourier-Trf., angewandt auf eine Fourier-Transformierte, die Ausgangsfunktion gespiegelt um die y-Achse ergibt die **Symmetrie-Eigenschaft** der Fourier-Transformation:

$$f(x) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; F(u) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{F(x)} \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \mathbf{f(-u)}$$

Fourier-Transformation

- $f(x) = \delta(x - x_0)$

  Siebeigenschaft

  $F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) \cdot e^{-j \cdot u \cdot x}\, dx$

  $\mathscr{F}\{\delta(x)\}$

  $= [e^{-j \cdot u \cdot x}]_{x=x0} = e^{-j \cdot u \cdot x0} = e^0 \cdot e^{-j \cdot u \cdot x0}$

- Ergebnis läßt sich auf bel. Funktionen f(x) übertragen: (*)

  Symmetrie-Eigenschaft

  $f(x-\alpha)$ **o—●** $F(u) \cdot e^{-j \cdot u \cdot \alpha}$ bzw. $F(u-\alpha)$ **●—o** $f(x) \cdot e^{j \cdot x \cdot \alpha}$

- Fourier-Transformierte eines (eindim.) Faltungsintegrals:

$$\mathscr{F}\{ f(x) * h(x) \} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) \cdot h(x-\alpha)\, d\alpha \right] \cdot e^{-j \cdot u \cdot x}\, dx$$

f(α) unabhängig von x

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) \cdot \overbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(x-\alpha) \cdot e^{-j \cdot u \cdot x}\, dx \right]}^{\mathscr{F}\{ h(x-\alpha) \}} d\alpha$$

H(u) unabhängig von α

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) \cdot [\, \overbrace{\mathscr{F}\{ h(x) \}}^{H(u)} \cdot e^{-j \cdot u \cdot \alpha}\,]\, d\alpha = H(u) \cdot \overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) \cdot e^{-j \cdot u \cdot \alpha}\, d\alpha}^{\mathscr{F}\{ f(\alpha) \}}$$

$$= H(u) \cdot F(u)$$

(*) Hier ohne Beweis

Anmerkungen zu Fourier (5):

Der Faltung im Ortsbereich entspricht die Multiplikation im Frequenzbereich. **Faltungssatz** (1. Teil bzw. Hälfte):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) \cdot h(x-\alpha)\, d\alpha = \boxed{f(x) * h(x) \quad \circ\!-\!\!-\!\bullet \quad F(u) \cdot H(u)}$$

d.h., übertragen auf (1D-/2D-) Maskenoperationen:

Es führt zum gleichen Ergebnis, ob man Masken- und Bildelemente miteinander multipliziert und aufsummiert oder

- Bild und Maske in den Frequenzbereich transformiert,
- d.Transformierten elementweise miteinander multipliziert
- das Ergebnis in den Ortsbereich zurücktransformiert.

Entsprechend hergeleitet: der 2. Teil des Faltungssatzes (*)

$$\boxed{f(x) \cdot h(x) \quad \circ\!-\!\!-\!\bullet \quad F(u) * H(u)}$$

(*) Hier ohne Beweis

Fourier-Transformation

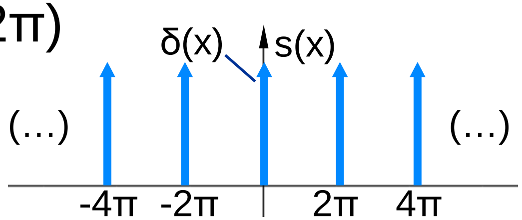
- <u>Abtastung</u> einer stetigen Fkt. $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ darstellbar als Multiplikation v. $f(x)$ mit einer äquidistanten Impulsfolge („Dirac-Kamm“, engl. *impulse train / comb*)

  Bei Periode 2π liefert das die Werte (wg. Siebeigenschaft)

  $f(k\cdot 2\pi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot\delta(x - k\cdot 2\pi)\,dx$, $k=\ldots -2, -1, 0, 1, 2\ldots$

- Impulsfolge als unendliche Reihe versetzter Dirac-Deltas:

  $s(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - n\cdot 2\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$ (hier: mit Periode 2π)



- Fourier-Reihe von $s(x)$:

  $s(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\cdot e^{j\cdot k\cdot x}$, mit c_k aus dem Integral über eine Periode:

$$c_k = (1/2\pi)\int_{-\pi}^{+\pi} s(x)\cdot e^{-j\cdot k\cdot x}\,dx = (1/2\pi)\int_{-\pi}^{+\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - n\cdot 2\pi)\cdot e^{-j\cdot k\cdot x}\,dx$$

$$= (1/2\pi)\cdot\int_{-\pi}^{+\pi} \delta(x)\cdot e^{-j\cdot k\cdot x}\,dx = (1/2\pi)\cdot e^{0} = (1/2\pi)$$

Fourier-Transformation

- Fourier-Transformierte von $s(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{(1/2\pi)}_{c_k} \cdot e^{j \cdot k \cdot x}$:

$$S(u) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j \cdot k \cdot x} \cdot e^{-j \cdot u \cdot x}\, dx = (1/2\pi) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathscr{F}\{ e^{j \cdot k \cdot x} \}$$

- Bereits bekannt: $\mathscr{F}\{ \delta(x - x_0) \} = e^{-j \cdot x0 \cdot u}$
- Symmetrie-Eigenschaft [f(x)**o**—●F(u) ⇔ F(x)**o**—●f(-u)]:

$$\mathscr{F}\{ e^{-j \cdot x0 \cdot x} \} = \delta(-u - x_0) = \delta(u + x_0)$$

Für $k = -x_0$ ergibt sich daraus: $\mathscr{F}\{ e^{j \cdot k \cdot x} \} = \delta(u - k)$

- Daraus folgt: $S(u) = (1/2\pi) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(u - k)$

⇨ D.h.: Die Transformierte einer Impulsfolge im Ortsbereich ist eine Impulsfolge im Frequenzbereich

(Bedeutung von k: „Impulse je Periode“ – hier: 1/2π)

- Übertragung auf Impulsfolgen beliebiger Periode ΔX (*):

$$s_{\Delta X}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - n\cdot\Delta X)\ ,\ n\in\mathbb{Z}$$

- Skalierung von x als Anteil der Periode ΔX: $x \rightarrow (2\pi/\Delta X)\cdot x$
  (d.h.: bei $x=n\cdot\Delta X$ liegen die Grenzen einzelner Perioden)
  Entsprechende Rechnung führt zu $c_k = 1/\Delta X$ und zu: (*)
- Fourier-Reihe von $s_{\Delta X}(x)$: (*)

$$s_{\Delta X}(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\cdot e^{\,j\cdot k\cdot(2\pi/\Delta X)\cdot x} = (1/\Delta X)\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{\,j\cdot k\cdot(2\pi/\Delta X)\cdot x}$$

- $\mathscr{F}$ { Impulsfolge $s_{\Delta X}(x)$}: $S_{\Delta X}(u) = (1/\Delta X)\cdot\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(u - k/\Delta X)$ (*)

diskrete Fkt.

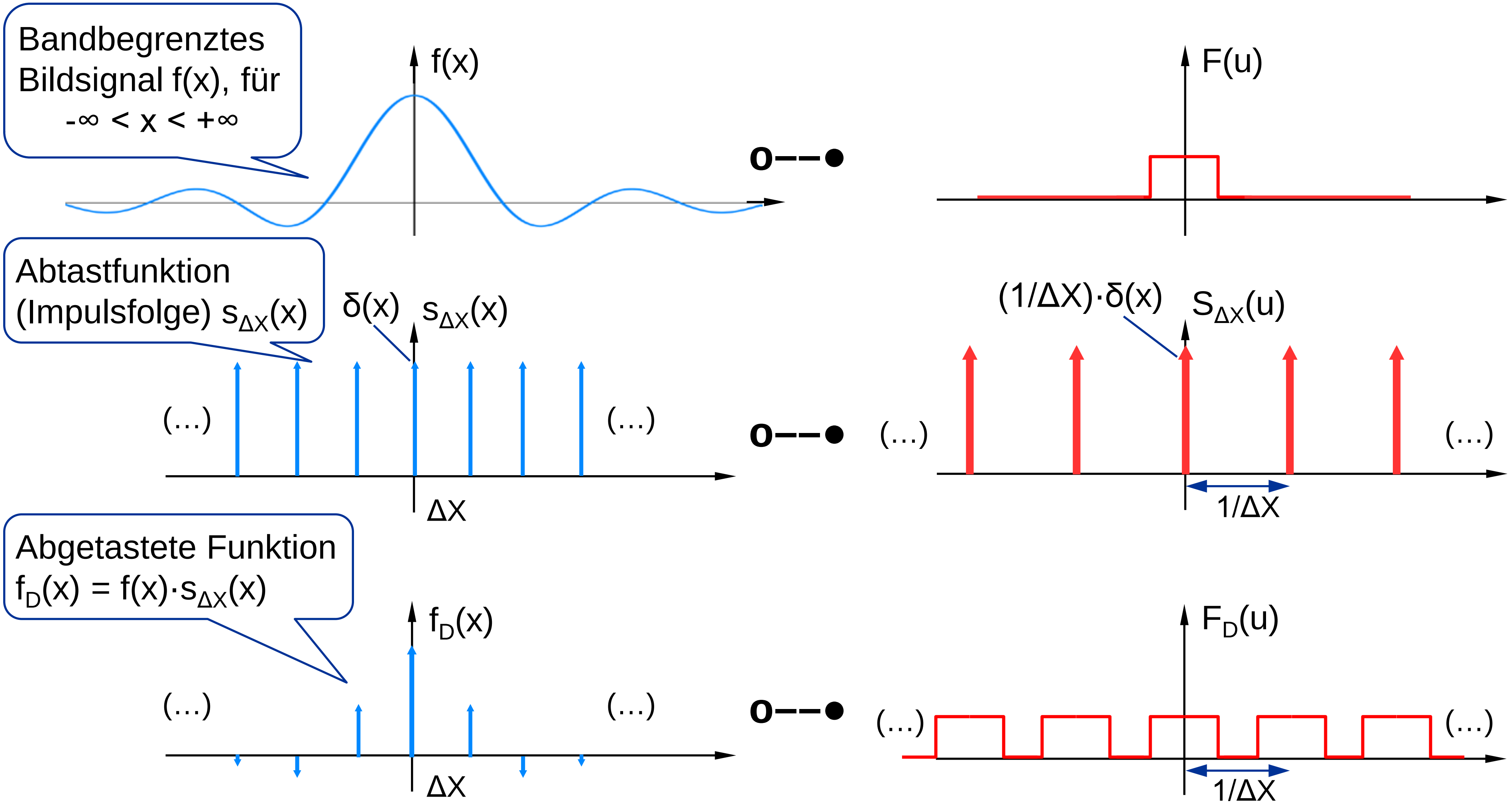
stetige Fkt.

- $\mathscr{F}$ {abgetastete Fkt. $f_D(x)$}: $F_D(u) = (1/\Delta X)\cdot\sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(u - k/\Delta X)$ (*)

(*) Hier ohne Beweis

Fourier-Transformation

- Visualisierte Zusammenfassung (qualitative Darstellung):



Fourier-Transformation

Zusammenfassung:

- Die Fourier-Transformierte einer Impulsfolge $s_{\Delta X}(x)$ im Ortsbereich mit der Periode ΔX ist eine Impulsfolge $S_{\Delta X}(u)$ im Frequenzbereich mit der Periode $1/\Delta X$.
- Die diskrete Abtastung $f_D(x)$ einer stetigen Funktion f(x) läßt sich darstellen als die Multiplikation von f(x) mit einer Impulsfolge $s_{\Delta X}(x)$ und Integration: $f_D(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot s_{\Delta X}(x)$
- Die Fourier-Transformierte der diskreten Abtastung $f_D(x)$ einer stetigen Funktion f(x) ist eine stetige Funktion $F_D(u)$

  (eine unendliche Summe um $1/\Delta X$ versetzter F(u)-Kopien)
- Bei ausreichend großem $1/\Delta x$ (kleinem Δx) läßt sich aufgrund der Bandbegrenzung eine einzelne Periode von $F_D(u)$, $-1/(2\Delta x) \leq u \leq 1/(2\Delta x)$ [d.h.: F(u)] extrahieren und daraus $f(x) = \mathscr{F}^{-1}\{ F(u) \}$ ermitteln.

Fourier-Transformation

- Übergang zur **diskreten** Fourier-Trf. **DFT**:

  Ausgehend von einem Satz von M Proben einer stetigen Funktion f(x) erzeugt DFT einen Satz von M Proben deren Fourier-Transformierten F(u). Ihre Inverse, **IDFT**, liefert, umgekehrt, aus M F(u)-Proben, die Werte von f(x).

- Transformationspaar der **diskreten** Fourier-Trf. **DFT**:

$F_D(u) = \sum_{x=0}^{M-1} f_D(x) \cdot e^{-j \cdot u \cdot x}$	$f_D(x) = 1/M \cdot \sum_{u=0}^{M-1} F_D(u) \cdot e^{j \cdot u \cdot x}$

  mit u=0, 1, …, M-1 und x=0, 1, …, M-1;

  $f_D(x)$ ist die Folge der Abtastwerte einer stetigen Funktion.

- Anwendung in der Bildverarbeitung durch Annahme unendlicher Periodizität der endlichen Anzahl M ($M \neq \infty$) verfügbarer diskreter Abtastwerte $f_D(x)$, $x \in Z$

Anmerkungen zu Fourier (6):

DFT: Summe gewichteter Kopien der Eulerschen Funktion bei angenommener Periodizität zugrunde liegender f(x); d.h.:

- **DFT**-Transformierte beliebiger Funktionen (Wertepaare) sind immer **unendlich und periodisch**.
- Anders als $\mathscr{F}$ { f(x) } ist die DFT und ihre Inverse für beliebige Funktionen **immer existent u. berechenbar**.
- Für die DFT gelten dieselben Regeln wie für die allg. $\mathscr{F}$\{ \};
  Faktor 1/M kann auch $\mathscr{F}$\{ \} vorgesetzt werden (vgl. 1/2π).
  Daher wird i.a. dieselbe Notation verwendet: $\mathscr{F}$\{ \}, F(u)
  Wichtiger Spezialfall:
- **Periodische, bandbegrenzte** Fktn [d.h.: definiert (-∞,+∞)] können aus Abtastwerten **verlustfrei** rekonstruiert werden
  Voraussetzung hierfür ist eine ausreichende Abtastrate (d.h.: Dichte der Abtastwerte).