

6.2.2 Partielle Integration

Bsp.:

$$\int x \cdot e^x dx$$

 \Rightarrow Substitution ist nicht möglich

Verwende Produktregel der Differenti alrechnung zur Herleitung

$$\frac{d}{dx}[u(x) \cdot v(x)] = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x) \quad / - (u'(x)v(x))$$

$$\frac{d}{dx}[u(x) \cdot v(x)] - u'(x) \cdot v(x) = v'(x) \cdot u(x)$$

Integration:

$$\int \frac{d}{dx}(u(x) \cdot v(x)) dx - \int u'(x) \cdot v(x) dx = \int v'(x) \cdot u(x) dx$$

$$= u(x) \cdot v(x)$$

Somit:

$$\underline{u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx = \int v'(x) \cdot u(x) dx}$$

Bsp.(s.o.):

$$\int x \cdot e^x dx$$

Wähle $x = u(x)$, $e^x = v'(x)$ dann $v(x) = e^x$:

$$\Rightarrow \int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x dx$$

$$= x \cdot e^x - e^x + c$$

$$d.h. \int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - e^x + c$$

Zusammenfassung:Gesucht ist $\int f(x) dx$, wobei $f(x)$ durch die Faktoren $u(x)$ und $v'(x)$ beschreibbar ist.Falls die Stammfunktion $v(x)$ von $v'(x)$ bekannt ist, kann das Integral wie folgt umgeformt werden:

$$\int f(x) dx = \int v'(x) \cdot u(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx$$

Falls $\int u'(x) \cdot v(x) dx$ lösbar, dann ist $\int f(x) dx$ berechnet.

Merkregel : $\int uv' = uv - \int u'v$

Bsp.:

$$(1) \quad \int 1 \cdot \ln x dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} x dx = x \cdot \ln x - x + c$$

$$= x(\ln x - 1) + c$$

$$v' = 1 \quad v = x$$

$$u = \ln x \quad u' = \frac{1}{x}$$

$$(2) \quad \int x \cdot \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{2 \cdot 2} + c$$

$$v' = x \quad v = \frac{x^2}{2}$$

$$u = \ln x \quad u' = \frac{1}{x}$$

$$(3) \quad \int x^n \cdot e^{ax} dx = ?$$

$$v' = e^{ax} \quad v = \frac{1}{a} e^{ax}$$

$$u = x^n \quad u' = n \cdot x^{n-1}$$

$$\int x^n \cdot e^{ax} dx = x^n \cdot \frac{1}{a} e^{ax} - \int n \cdot x^{n-1} \cdot \frac{e^{ax}}{a} dx$$

$$\int x^n \cdot e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^n \cdot e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cdot e^{ax} dx$$

$$\int x^{n-1} \cdot e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^{n-1} \cdot e^{ax} - \frac{n-1}{a} \int x^{n-2} \cdot e^{ax} dx$$

usw.

$$(4) \quad \int \sin^2 x dx = \int \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) dx$$

$$= \int \frac{1}{2} dx - \int \frac{1}{2} \cos 2x dx$$

$$= \frac{1}{2} x + c - \int \frac{1}{2} \cos 2x dx$$

Berechne : $-\frac{1}{2} \int \cos 2x dx$

Setze $u = 2x \quad \frac{du}{dx} = 2 \quad dx = \frac{du}{2}$

$$\begin{aligned}\int \cos 2x \, dx &= \int \cos u \frac{du}{2} = \int \frac{\cos u}{2} du = \frac{1}{2} \int \cos u \, du = \frac{1}{2} \sin u \\ \Rightarrow -\frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 2x \\ \Rightarrow \int \sin^2 x \, dx &= \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) + c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(5) \quad \int_0^{\pi} x^2 \cdot \cos x \, dx &= \left[x^2 \cdot \sin x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x \cdot \sin x \, dx \quad (*) \\ u &= x^2 \quad u' = 2x \\ v' &= \cos x \quad v = \sin x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Bleibt : } \int 2x \cdot \sin x \, dx &= 2 \cdot \int x \cdot \sin x \, dx \\ \int x \cdot \sin x \, dx &= -x \cdot \cos x - \int 1 \cdot (-\cos x) \, dx \\ &= -x \cdot \cos x + \int \cos x \, dx \\ &= -x \cdot \cos x + \sin x + c \\ u &= x \quad u' = 1 \\ v' &= \sin x \quad v = -\cos x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(*) &= \left[x^2 \cdot \sin x \right]_0^{\pi} - 2 \left[-x \cdot \cos x + \sin x \right]_0^{\pi} \\ &= \pi^2 \cdot \sin \pi - 0^2 \cdot \sin 0 - 2 \left[-\pi \cdot \cos \pi + \sin \pi + 0 \cdot \cos 0 - \sin 0 \right] \\ &= -2 \left[-\pi \cdot (-1) \right] = -2\pi\end{aligned}$$

6.2.3 Integration gebrochenrationaler Funktion durch Partialbruchzerlegung

$$\text{Bsp.: } \int \frac{x^3 + 4x + 2}{x^2 - 4} dx = ?$$

$$f(x) = \frac{x^3 + 4x + 2}{x^2 - 4} \quad \text{ist unecht gebrochenrational}$$

Somit Zerlegung in Polynom + echt gebrochenrationale Funktion möglich.

Polynomdivision :

$$\begin{array}{r} (x^3 + 4x + 2) : (x^2 - 4) = x + \frac{8x + 2}{x^2 - 4} \\ \underline{-(x^3 - 4x)} \\ 8x + 2 \end{array}$$

$$\text{Somit : } \int \frac{x^3 + 4x + 2}{x^2 - 4} dx = \int \left(x + \frac{8x + 2}{x^2 - 4} \right) dx = \int x dx + \int \frac{8x + 2}{x^2 - 4} dx$$

$$\text{Integration von Polynom mit } \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$$

$$\text{d.h. } \int x dx = \frac{1}{2} x^2 + c$$

$$\begin{aligned} \text{Anm.: } \int (a^n x^n + a^{n-1} x^{n-1} + a_1 x^1 + a_0) dx \\ = a^n \int x^n dx + a^{n-1} \int x^{n-1} dx + a_1 \int x dx + a_0 \int 1 dx \end{aligned}$$

Somit bleibt zu lösen :

$$\int \frac{8x + 2}{x^2 - 4} dx = ?$$

echt gebrochenrational, d.h. Grad Nenner > Grad Zähler

"einfachster Fall" einer echt gebrochenrationalen Funktion :

$$\int \frac{A}{x+B} dx = A \cdot \ln|x+B| - c \quad \text{d.h. ist lösbar}$$

Lösungsidee : Rückführung auf diesen einfachen Fall

$$\frac{8x + 2}{x^2 - 4} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} \quad A_1, A_2, x_1, x_2 \text{ sind gesucht!}$$

→ Partialbruchzerlegung

Falls dies gelingt, dann Problem gelöst!

Bestimmung von A_1, A_2, x_1, x_2 :

$$\frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} = \frac{A_1(x-x_2) + A_2(x-x_1)}{(x-x_1) \cdot (x-x_2)} \stackrel{!}{=} \frac{8x+2}{x^2-4}$$

Nenner : $x^2 - 4 = (x-2) \cdot (x+2) \stackrel{!}{=} (x-x_1) \cdot (x-x_2)$
 $\Rightarrow x_1 = -2, x_2 = +2$

Zähler : $A_1(x-x_2) + A_2(x-x_1) = A_1(x-2) + A_2(x-(-2)) =$
 $A_1x - 2A_1 + A_2x + 2A_2 = x \cdot (A_1 + A_2) - 2A_1 + 2A_2 = 8x + 2$

$$A_1 + A_2 = 8 \quad (1)$$

$$2A_1 - 2A_2 = 2 \quad (2) \quad \text{Gls. für } A_1, A_2$$

$$(2)A_1 - A_2 = 1 \Leftrightarrow A_1 = 1 + A_2$$

$$\text{in (1)} \quad 1 + A_2 + A_2 = 8 \Leftrightarrow 1 + 2A_2 = 8 \Leftrightarrow 2A_2 = 8 - 1 \Leftrightarrow A_2 = \frac{7}{2}$$

$$\text{in (2)} \quad A_1 = 1 + \frac{7}{2} = \frac{9}{2}$$

Somit $A_1 = \frac{9}{2}$ und $A_2 = \frac{7}{2}$

$$\begin{aligned} d.h. \int \frac{8x+2}{x^2-4} dx &= \int \frac{4,5}{x-(-2)} dx + \int \frac{3,5}{x-2} dx \\ &= 4,5 \cdot \ln|x+2| + 3,5 \cdot \ln|x-2| + c \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir :

$$\int \frac{x^3 + 4x + 2}{x^2 - 4} dx = \frac{1}{2}x^2 + 4,5 \ln|x+2| + 3,5 \ln|x-2| + c$$

Bsp.: Partialbruchzerlegung

$$\int \frac{4x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 5x + 6} dx = ?$$

GradZähler > GradNenner \Rightarrow Polynomdivision

zur Polynomdivision :

$$\begin{array}{r} 5623 : 21 = 267 + \frac{16}{21} \\ -(42) \\ \hline 142 \\ -(126) \\ \hline 163 \\ -(147) \\ \hline 16 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (4x^3 - 2x^2 + 1) : (x^2 - 5x + 6) = 4x + 18 + \frac{66x - 107}{x^2 - 5x + 6} \\ -(4x^3 - 20x^2 + 24x) \\ \hline 18x^2 - 24x + 1 \\ -(18x^2 - 90x + 108) \\ \hline 66x - 107 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Somit : } \int \frac{4x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 5x + 6} dx &= \int 4x + 18 dx + \int \frac{66x - 107}{x^2 - 5x + 6} dx \\ &= \frac{4}{5}x^5 + 18x + c + \int \frac{66x - 107}{x^2 - 5x + 6} dx \end{aligned}$$

1. Bestimmung der Nullst. von $N = x^2 - 5x + 6$

$$x_{1/2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} \quad x_1 = 3 \quad x_2 = 2$$

$$2. \quad \frac{66x - 107}{x^2 - 5x + 6} = \frac{A}{(x - 3)} + \frac{B}{(x - 2)}$$

Aufstellen des linearen Gls. zur Berechnung von A und BVariante 1: Hauptnenner

$$66x - 107 = A(x - 2) + B(x - 3) = Ax - 2A + Bx - 3B$$

$$\Leftrightarrow 66x - 107 = (A + B)x - 2A - 3B$$

Koeffizientenvergleich ergibt :

$$(1) \quad 66 = A + B$$

$$(2) \quad -107 = -2A - 3B$$

Lösung des Gls. :

$$(1) \quad \Rightarrow A = 66 - B \quad \text{in (2) ergibt : } -107 = -2(66 - B) - 3B$$

$$\Leftrightarrow -107 = -132 + 2B - 3B \quad / +132$$

$$25 = -B \Leftrightarrow B = -25$$

$$\text{Einsetzen liefert : } A = 66 - (-25) = 91$$

Variante 2: Einsetzen der Nennernullstellen in

$$66x - 107 = A(x - 2) + B(x - 3)$$

$$x_1 = 3: \quad 66 \cdot 3 - 107 = A(3 - 2) + B(3 - 3)$$

$$198 - 107 = A \cdot (1)$$

$$91 = A$$

$$x_2 = 2: \quad 66 \cdot 2 - 107 = A(2 - 2) + B(2 - 3)$$

$$132 - 107 = B(-1)$$

$$25 = -B$$

$$-25 = B$$

Somit erhalten wir :

$$\frac{66x - 107}{x^2 - 5x + 6} = \frac{91}{x - 3} - \frac{25}{x - 2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{66x - 107}{x^2 - 5x + 6} dx = \int \frac{91}{x - 3} - \frac{25}{x - 2} dx = \int \frac{91}{x - 3} dx - \int \frac{25}{x - 2} dx$$

$$= 91 \cdot \int \frac{1}{x - 3} dx - 25 \int \frac{1}{x - 2} dx$$

$$= 91 \cdot \ln|x - 3| + c_1 - 25 \cdot \ln|x - 2| + c_2$$

Bsp.: $\int \frac{x-2}{x^2+2x+1} = ?$

Nullstellen des Nenners :

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 1 \quad \text{d.h. } 1 \text{ ist doppelte Nst.}$$

$$\frac{x-2}{x^2+2x+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+1} \quad \leftarrow \text{Hauptnenner wäre } x+1$$

$$x-2 = A(x+1) + B(x+1) = x(A+B) + A+B$$

$$\Rightarrow A+B=1 \quad \wedge \quad A+B=-2 \quad \Rightarrow \text{keine Lösung}$$

Neuer Ansatz bei mehrfacher Nullstelle (Idee : $\frac{1}{x^n}$ ist integrierbar!)

$$\frac{x-2}{x^2+2x+1} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{(x+1)}$$

$$\Rightarrow x-2 = A + B(x+1) = xB + A + B$$

$$\Rightarrow B=1 \text{ und } A+B=-2 \Rightarrow A+1=-2 \Rightarrow A=-3$$

Somit :

$$\int \frac{x-2}{x^2+2x+1} dx = \int \frac{A}{(x+1)^2} dx + \int \frac{B}{(x+1)} dx$$

$$= \int \frac{A}{(x+1)^2} dx + B \cdot \ln|x+1|$$

Bleibt :

$$A \int \frac{1}{(x+1)^2} dx = ? \quad u = x+1 \quad \frac{du}{dx} = 1 \Leftrightarrow du = dx$$

$$A \int \frac{1}{(x+1)^2} dx = A \int \frac{1}{u^2} du = A \cdot \left(\frac{-1}{u} \right) + c = \frac{-A}{x+1} + c$$

Insgesamt :

$$\int \frac{x-2}{x^2+2x+1} dx = \frac{-A}{x+1} + B \cdot \ln|x+1| + c$$

Bsp.: $\int \frac{3x+4}{x^2-6x+34} dx = ?$

Nullstelle des Nenners :

$$x_{1/2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 34}}{2} = \frac{6 \pm 10i}{2}$$

$$\sqrt{36 - 4 \cdot 34} = \sqrt{36 - 136} = \sqrt{-100} \quad \leftarrow \text{keine reelle Lösung}$$

Aber es existiert eine Lösung im Definitionsbereich der komplexen Zahlen :

Nullstellen :

$$x_1 = 3 - 5i \quad x_2 = 3 + 5i \quad \text{wobei } i = \sqrt{-1} \quad \Rightarrow \quad i \cdot i = -1$$

$$\begin{aligned} (x - x_1) \cdot (x - x_2) &= (x - (3 - 5i)) \cdot (x - (3 + 5i)) \\ &= (x - 3 + 5i) \cdot (x - 3 - 5i) \\ &= x^2 - 3x + 5ix \\ &\quad - 3x \quad + 9 - 15i \\ &\quad - 5ix \quad + 15i - 25i^2 \\ &= x^2 - 6x \quad + 9 - 25i^2 = x^2 - 6x + 9 + 25 = x^2 - 6x + 34 \end{aligned}$$

Ansatz mit A und B wie bisher würde dazu führen, daß A und B komplexe Zahlen wären.

\Rightarrow Falls die Nullstelle des Nenners komplex und einfach (Vielfachheit 1) ist, dann :

Neuer Ansatz :

$$\begin{aligned} \text{Idee : } \int \frac{f'(x) + c}{f(x)} dx &= \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx + \int \frac{c}{f(x)} dx \\ &= \ln|f(x)| + c_1 \end{aligned}$$

wobei $f(x)$ vom Grad 2 ist! (komplexe + konjugiert komplexe Lösung)

$$\begin{aligned} \frac{3x - 4}{x^2 - 6x + 34} &= \frac{\frac{3}{2}(2x - 6) + 5}{x^2 - 6x + 34} \\ f(x) &= x^2 - 6x + 34 \\ f'(x) &= 2x - 6 \end{aligned}$$

Somit :

$$\begin{aligned} \int \frac{3x - 4}{x^2 - 6x + 34} dx &= \int \frac{\frac{3}{2}(2x - 6) + 5}{x^2 - 6x + 34} dx \\ &= \frac{3}{2} \underbrace{\int \frac{2x - 6}{x^2 - 6x + 34} dx} + 5 \int \frac{1}{x^2 - 6x + 34} dx \\ &= \frac{3}{2} \cdot \ln|x^2 - 6x + 34| + c_1 \end{aligned}$$

Bleibt zu berechnen :

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 - 6x + 34} dx &= \int \frac{1}{(x - 3)^2 + 25} dx = \int \frac{\frac{1}{25}}{\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{25}{25}} dx \\ &\quad \uparrow \\ &\text{quadr. Ergänzung } (x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9 \end{aligned}$$