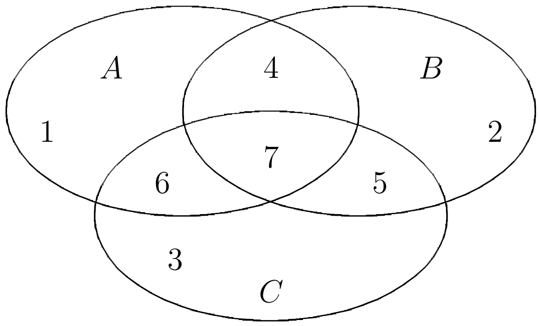
Mengen

Aufgabe 1.
Gegeben seien die folgenden drei sich überschneidenden Teilmengen A, B und C in der Ebene:



Wie erhält man die mit 1 bis 7 gekennzeichneten sich **nicht** überschneidenden Teilmengen der Ebene durch Mengenoperationen aus A, B und C?

Lösung: Wir bezeichnen die sieben Mengen im folgenden mit $M_1, \ldots, M_7$. Man kann diese Mengen auf mehrere Arten durch Mengenoperationen mit den Mengen A, B und C bekommen. Zum Beispiel ist:

$$\begin{aligned}
M_1 &= (A \setminus B) \setminus C \quad \text{oder} \quad M_1 = A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \\
M_2 &= (B \setminus A) \setminus C \\
M_3 &= (C \setminus A) \setminus B \\
M_4 &= (A \cap B) \setminus C \\
M_5 &= (B \cap C) \setminus A \\
M_6 &= (A \cap C) \setminus B \\
M_7 &= A \cap B \cap C
\end{aligned}$$

Aufgabe 2.
Welche Ergebnisse liefern die folgenden Mengenoperationen?

1. $\{1, 2, 3\} \cup \{1, 3, 5, 7\}$
2. $\{1, 2, 3, 4\} \cap \{1, 3, 5, 7, 9\}$
3. $\{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus \{1, 3, 5, 7\}$

4. $\{1,2,4,8\} \cap \{x,y,z\}$
5. $\big(\{1,2,3\} \cap \{1,3,5\}\big) \cup \{x,y,z\}$
6. $\big(\{1,2,3\} \cup \{1,3,5\}\big) \cap \{x,y,z\}$
7. $\{1,5,10\} \setminus \{x,y,z\}$
8. $\{1,2,3,4,5\} \setminus \big(\{1,2,3,4,5\} \cap \{2,4,6\}\big)$

Lösung:

1. $\{1,2,3\} \cup \{1,3,5,7\} = \{1,2,3,5,7\}$
2. $\{1,2,3,4\} \cap \{1,3,5,7,9\} = \{1,3\}$
3. $\{1,2,3,4,5\} \setminus \{1,3,5,7\} = \{2,4\}$
4. $\{1,2,4,8\} \cap \{x,y,z\} = \emptyset$
5. $\big(\{1,2,3\} \cap \{1,3,5\}\big) \cup \{x,y,z\} = \{1,3,x,y,z,\}$
6. $\big(\{1,2,3\} \cup \{1,3,5\}\big) \cap \{x,y,z\} = \emptyset$
7. $\{1,5,10\} \setminus \{x,y,z\} = \{1,5,10\}$
8. $\{1,2,3,4,5\} \setminus \big(\{1,2,3,4,5\} \cap \{2,4,6\}\big) = \{1,3,5\}$

Aufgabe 3.
Es sei $A = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ und $B = \{-4,-2,2,4\}$. Welche Mächtigkeiten haben die Mengen: A, B, $A \cup B$, $A \cap B$, $(A \cap B) \cup A$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \cup A \cup A$, $A \times A$, $B \times B$, $A \times B$, $B \times A$?

Lösung: Die Mächtigkeit einer endlichen Menge ist gleich der Anzahl ihrer Elemente. Es ist $|A| = 7$ und $|B| = 4$.

Weil $A \cup B = \{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$ ist, gilt $|A \cup B| = 9$. Man beachte, daß in diesem Fall $|A \cup B| \neq |A| + |B|$ ist, weil es Elemente gibt, die in beiden Mengen enthalten sind. Die Anzahl dieser Elemente ist $|A \cap B| = 2$. Wir haben hier ein Beispiel für

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

mit den speziellen Werten $9 = 7 + 4 - 2$.

Es ist $(A \cap B) \cup A = A$ und deshalb $|(A \cap B) \cup A| = 7$. Ferner ist $|A \setminus B| = 5$ und $|B \setminus A| = 2$ sowie $|A \cup A \cup A| = 7$.

Man muß die kartesischen Produkte nicht explizit aufschreiben, um ihre Mächtigkeiten angeben zu können. Es ist $|A \times A| = |A| \cdot |A| = 7 \cdot 7 = 49$. Entsprechend ergibt sich $|B \times B| = 16$ sowie $|A \times B| = 28$ und $|B \times A| = 28$.

Aufgabe 4.
Geben Sie zu $A = \{1,2,3\}$, $B = \{x,y\}$ und $C = \{0\}$ die Menge $M = A \times B^2 \times C$ in der aufzählenden Darstellung an.

Lösung: $M = A \times B^2 \times C = A \times B \times B \times C$ ist ein kartesisches Produkt aus vier Mengen; also ist M eine Menge von 4-Tupeln.

$$\begin{aligned} M \;=\; \{ & (1,x,x,0),(1,x,y,0),(1,y,x,0),(1,y,y,0),\\ & (2,x,x,0),(2,x,y,0),(2,y,x,0),(2,y,y,0),\\ & (3,x,x,0),(3,x,y,0),(3,y,x,0),(3,y,y,0)\, \} \end{aligned}$$

Aufgabe 5.
Es sei $A_i = \{1,2,3,\ldots,i\} = \{m \in \mathbb{N} \,|\, m \leq i\}$ für ein beliebiges $i \in \mathbb{N}$. Welche Elemente sind in den folgenden Mengen enthalten?

$$M_1 = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \qquad M_2 = \bigcap_{i=1}^{n} A_i \qquad M_3 = \bigcup_{i=1}^{20} (A_{2i} \setminus A_{2i-1})$$

Lösung: Zur Verdeutlichung kann man sich die Mengen A_i für einige Werte von i aufschreiben:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{1\}\\ A_2 &= \{1,2\}\\ A_3 &= \{1,2,3\}\\ A_4 &= \{1,2,3,4\}\\ &\vdots \end{aligned}$$

Damit gilt offensichtlich

$$\begin{aligned} M_1 &= \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{1,2,3,\ldots,n\} = \{m \in \mathbb{N} \,|\, m \leq n\} = A_n,\\ M_2 &= \bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \{1\} = A_1,\\ M_3 &= \bigcup_{i=1}^{20} (A_{2i} \setminus A_{2i-1}) = (A_2 \setminus A_1) \cup (A_4 \setminus A_3) \cup \ldots \cup (A_{40} \setminus A_{39})\\ &= \{2\} \cup \{4\} \cup \ldots \cup \{40\} = \{2,4,6,\ldots,38,40\}\\ &= \{m \in \mathbb{N} \,|\, m \leq 40 \text{ und } m \text{ gerade}\}. \end{aligned}$$

Aufgabe 6.
Schreiben Sie die Potenzmengen von $M_1 = \{a,b\}$ und $M_2 = \{x,y,z\}$ auf.

Lösung: Es ist

$$\mathcal{P}(M_1) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$$

und

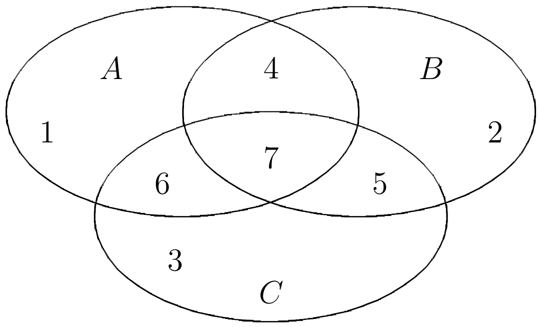
$$\mathcal{P}(M_2) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x,y\}, \{x,z\}, \{y,z\}, \{x,y,z\}\}.$$

Aufgabe 7.
Wenn A und B zwei endliche Mengen sind, dann gilt für die Mächtigkeit der Vereinigungsmenge

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Jetzt seien drei endliche Mengen A, B und C gegeben. Können Sie eine Formel für die Mächtigkeit der Vereinigung aller drei Mengen $|A \cup B \cup C|$ aufstellen? Es genügt eine anschauliche Argumentation mit einer Graphik.

Lösung: Wir betrachten drei sich überschneidende Mengen A, B und C in der Ebene. Damit haben wir eine bildliche Veranschaulichung der allgemeinen Situation.



Unser Ziel ist es, eine Formel für $|A \cup B \cup C|$ zu finden. Wenn wir die Summe $|A| + |B| + |C|$ bilden, zählen wir offenbar einige Elemente mehrfach, da sich die Mengen überlappen. Diesen Fehler werden wir im folgenden schrittweise korrigieren.

Durch die Summe $|A| + |B| + |C|$ werden die Elemente in den Teilflächen 1, 2 und 3 korrekt gezählt. Aber die Elemente in 4 werden doppelt gezählt, da sie sowohl in $|A|$ als auch in $|B|$ vorkommen. Entsprechend werden die Elemente in 5 und 6 doppelt gezählt.

Um den Fehler bei 4 zu korrigieren, subtrahieren wir $|A \cap B|$. Die richtige Zählung bei 1, 2 und 3 wird davon nicht betroffen. Entsprechend bringen wir die Situation bei 5 bzw. 6 in Ordnung, indem wir $|B \cap C|$ bzw. $|A \cap C|$ abziehen. Insgesamt bekommen wir damit $|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C|$.

Damit haben wir eine Formel, die für die Teilflächen 1 bis 6 richtig ist. Aber was ist mit der Teilfläche 7 ? In der Summe $|A| + |B| + |C|$ werden die Elemente aus 7 dreimal gezählt. Durch das Subtrahieren von $|A \cap B|$ sowie $|B \cap C|$ und $|A \cap C|$ werden die Elemente aus 7 aber auch dreimal abgezogen, so daß sie am Ende überhaupt nicht mitgezählt werden.

Um das zu korrigieren, addieren wir noch $|A \cap B \cap C|$. Die Teilflächen 1 bis 6 sind davon nicht betroffen, aber die Elemente aus 7 werden jetzt genau einmal gezählt. Somit erhalten wir als Endergebnis die Formel

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Aufgabe 8.
Es seien A, B und C Mengen. Beweisen Sie die Distributivgesetze

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Lösung: Vereinigung und Durchschnitt von Mengen wurden mit Hilfe von Junktoren der Aussagenlogik definiert. Deshalb lassen sich die beiden Distributivgesetze auf entsprechende Gesetze für Aussagen zurückführen.

Wir schreiben die Distributivgesetze in Formeln der Ausssagenlogik um, wenden darauf die bekannten (mit Wahrheitstafeln bewiesenen) Gesetze der Aussagenlogik an und schreiben die so erhaltenen Formeln wieder um in die Darstellung mit der Mengenvereinigung und dem Mengendurchschnitt.

$$\begin{aligned}
A \cap (B \cup C) &= \{x |\, (x \in A) \wedge (x \in (B \cup C))\} \\
&= \{x |\, (x \in A) \wedge [(x \in B) \vee (x \in C)]\} \\
&= \{x |\, [(x \in A) \wedge (x \in B)] \vee [(x \in A) \wedge (x \in C)]\} \\
&= \{x |\, [x \in (A \cap B)] \vee [x \in (A \cap C)]\} \\
&= (A \cap B) \cup (A \cap C)
\end{aligned}$$

Die Herleitung des zweiten Distributivgesetzes verläuft völlig analog.