Prof. Dr. Metz
FH Gießen–Friedberg

Version
K–W–01

Aufgabensammlung

zur Vorlesung

Mathematik 2

1 Komplexe Zahlen

1.1 Kartesische Darstellung

Aufgabe 1

Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = 3 - 2j$ und $z_2 = 4 + 2j$. Berechnen Sie

$$z_3 = z_1 \cdot z_2, \quad \mathrm{Re}\,(z_3), \quad \mathrm{Im}\,(z_3), \quad \bar{z}_3, \quad |z_3|$$

und

$$z_4 = \frac{z_1}{z_2}\,, \quad \mathrm{Re}\,(z_4), \quad \mathrm{Im}\,(z_4), \quad \bar{z}_4, \quad |z_4|.$$

Aufgabe 2

Berechnen Sie jeweils den Realteil und den Imaginärteil der folgenden Zahlen:

$$(1-j)^2, \quad (1+j)^2, \quad \frac{1}{1-j}\,, \quad \frac{1+j}{j}\,, \quad \frac{j}{1+j}\,, \quad \frac{1+j}{1-j}\,.$$

Aufgabe 3

Folgenden Ausdrücke sind zu berechnen:

a) $\dfrac{17-6j}{3-4j}$, b) $\dfrac{1+3j}{1-j}$, c) $\dfrac{5}{1-2j}$, d) $\dfrac{(3+j)^2}{2-j}$, e) $\left(\dfrac{3+2j}{5-7j}\right)^2$,

f) $\left(\dfrac{3-j}{5+2j}\right)^2$, g) $\dfrac{2+3j}{4-j} + \dfrac{2-3j}{1+4j}$.

Aufgabe 4

Gegeben sind $z_1 = 7 - 4j$, $z_2 = 10 - 2j$ und $z_3 = -1 + j$. Berechnen Sie

$$z_4 = \frac{z_1 + \bar{z}_2 \cdot j^2}{3\,\bar{z}_3}$$

sowie $\operatorname{Re}(z_4)$, $\operatorname{Im}(z_4)$, $\bar{z}_4$, $|z_4|$.

Aufgabe 5

Für welche reellen Zahlen a und b gilt

$$(a + 2j) \cdot (1 + bj) = (5 - 3j)^2 \qquad ?$$

1.2 Polarkoordinatendarstellung

Aufgabe 6

Gegeben sind $z_1 = 3 + 4j$ und $z_2 = -8 - 6j$. Berechnen Sie zunächst die trigonometrische Form und die Exponentialdarstellung und dann $z_1 \cdot z_2$ und z_1/z_2.

Aufgabe 7

Berechnen Sie zu der komplexen Zahl

$$z = \frac{9 - aj}{(2 + j)(3 + j)} + 4b \cdot e^{\frac{\pi}{6}j}$$

den Realteil $\operatorname{Re}(z)$ und den Imaginärteil $\operatorname{Im}(z)$.

Aufgabe 8

Für welche reellen Zahlen a und b gilt

$$\frac{a + 40j}{9 + bj} = 2\sqrt{2} \cdot e^{j\pi/4} \qquad ?$$

Aufgabe 9

Mit dem komplexen Zeiger $\underline{z} = 1 + 2j$ werden folgende Operationen durchgeführt:
a) $j \cdot \underline{z}$ b) $\underline{z}^*$ c) $\underline{z}/j$ d) $2 \cdot \underline{z}$ e) $e^{j\,30°} \cdot \underline{z}$ f) $|\,\underline{z}\,|$ g) $\underline{z}^2$
Stellen Sie diese Operationen in der Gaußschen Zahlenebene bildlich dar. Was bedeuten sie geometrisch?

Aufgabe 10

Es sei $z_2 = z_1 \cdot (q + jq)$ mit $q \in \mathbb{R}$ und $q > 0$. Geben Sie ein $z_1 \in \mathbb{C}$ an, so daß $\arg(z_2) = 135°$ ist.

Aufgabe 11

Sei $k > 0$ eine reelle Konstante. Geben Sie eine komplexe Zahl z an, so daß gilt:

$$\arg(z \cdot (k + jk)) = 315° \qquad (j\text{: imaginäre Einheit}).$$

1.3 Gleichungen

Aufgabe 12

Berechnen Sie die Nullstellen von $y = x^2 - x - jx + 1/4 + j/2$.

Aufgabe 13

Finden Sie eine quadratische Gleichung, die als Lösungen die komplexen Zahlen $2 + 2j$ und $2 - 2j$ hat.

Aufgabe 14

Von dem Polynom $P(z) = z^4 - 8z^3 + 16z^2 - 25$ ist die Nullstelle $z_1 = 2 - j$ bekannt. Bestimmen Sie die restlichen Nullstellen.

1.4 Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

Aufgabe 15

Berechnen und zeichnen Sie alle Werte der Wurzeln $\sqrt[3]{1}$, $\sqrt[4]{1}$, $\sqrt[5]{1}$ und $\sqrt[4]{4i}$. Zeichnen Sie für einen der Werte von $\sqrt[4]{4i}$ auch $(\sqrt[4]{4i})^2$ und $(\sqrt[4]{4i})^3$.

Aufgabe 16

Gegeben ist $z = 1{,}2 - 2{,}5j$. Berechnen Sie z^6. (Hinweis: Bringen Sie z zunächst in die Exponentialdarstellung.)

Aufgabe 17

Berechnen Sie sämtliche Wurzeln der Gleichung $z^6 = 1$.

Aufgabe 18

Berechnen Sie $\ln z$ und $\operatorname{Ln} z$ von $z = -5$.

2 Differentialgleichungen

2.1 Trennung der Veränderlichen

Aufgabe 19
Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\dot{u} = e^{-u/2}$$

Aufgabe 20
Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y' = \cos^2 y$$

Aufgabe 21
Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\dot{u} - u^3 = 0$$

mit der Anfangsbedingung $u = 1/2$ für $t = 0$.

Aufgabe 22
Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$$y' = \sqrt{(2x+1) \cdot y}$$

mit $y(0) = 1/36$.

Aufgabe 23
Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\dot{u}\, e^{-t^2} \cos u = t$$

Aufgabe 24

Ein 100-Liter-Tank ist mit einer Salzlösung gefüllt, die 60 Gramm Salz enthält. Nun läßt man pro Minute 2 l Wasser in den Tank laufen, und die durch ständiges Rühren homogen gehaltene Mischung läuft in gleichem Maße aus.

Bezeichnet $s(t)$ die Anzahl der Gramm Salz im Tank nach t Minuten, so beträgt die Konzentration $s(t)/100$ Gramm pro Liter, und für die Änderungsgeschwindigkeit gilt

$$s'(t) = -\frac{2}{100}\,\frac{1}{\min}\,s(t)\,.$$

Wieviel Gramm Salz befinden sich nach einer Stunde noch im Tank, wieviel nach zwei Stunden?

Aufgabe 25

Ein Körper der Anfangstemperatur $T(0) = T_0 = 50°C$ kühlt bei Eintauchen in einen großen Wasserbehälter der konstanten Temperatur $U = 20°C$ innerhalb von 2 Minuten auf $34°C$ ab. Die Funktion $T(t)$, welche den zeitlichen Temperaturverlauf des Körpers beschreibt, genüge dem Newtonschen Abkühlungsgesetz

$$T'(t) = -k\,(T(t) - U)$$

mit einer positiven Konstanten k.

Ermitteln Sie die Temperatur des Körpers zum Zeitpunkt $t = 3$ min.

Aufgabe 26

Eine Bakterienpopulation wird der Wirkung eines Toxins T ausgesetzt, wobei die durch T bewirkte Todesrate sowohl proportional der Anzahl $u(t)$ der zum Zeitpunkt t noch lebenden Bakterien wie auch proportional der Menge $T(t)$ des zu dieser Zeit vorhandenen Toxins sei. Die natürliche Vermehrung der Bakterien bei Abwesenheit von T erfolge exponentiell, so daß insgesamt gilt

$$u'(t) = (\gamma - \delta T(t))\,u(t), \qquad \text{mit positiven Konstanten } \gamma \text{ und } \delta.$$

Sei nun $T(t) = at$, mit einer Konstanten $a > 0$.

a) Begründen Sie aus der Differentialgleichung, daß die Bakterienpopulation bis zur Zeit $\gamma/(a\delta)$ noch wachsen, dann aber abnehmen wird.

b) Ermitteln Sie die Lösung der Differentialgleichung für $u(0) = u_0$.

2.2 Homogene lineare Dgl. mit konst. Koeffizienten

Aufgabe 27
Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y'' + 1,5\,y' - y = 0$$

Aufgabe 28
Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\ddot{u} - 4\dot{u} + 29u = 0$$

Aufgabe 29
Lösen Sie die Differentialgleichung

$$2\ddot{x} + 4\dot{x} + 2x = 0$$

mit den Anfangsbedingungen $x = 2$, $\dot{x} = 0$ für $t = 0$.

Aufgabe 30
Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\ddot{u} + K\dot{u} + 2u = 0$$

mit $u(0) = 0$ und $\dot{u}(0) = \sqrt{2}$.
Dabei sei: a) $K = 0$ b) $K = 2$ c) $K = 2 \cdot \sqrt{2}$ d) $K = 4$

2.3 Inhomogene lineare Dgl. mit konst. Koeffizienten

Aufgabe 31
Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$$y'' - 4y = 8x^3$$

mit $y(0) = 5$ und $y'(0) = -9$.

Aufgabe 32
Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y'' - 3y' + 2y = e^x \,.$$

Aufgabe 33
Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y'' + y' - 2y = g(x)$$

Dabei sei die Störfunktion: a) $g(x) = 10x + 1$ b) $g(x) = x^2 - 4x + 3$ c) $g(x) = 3 \cdot e^{4x}$ d) $g(x) = 6 \cdot e^x$ e) $g(x) = 3 \cdot \sin(2x)$

Aufgabe 34
Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$2y''' - 6y'' + 8y = \sin 2x$$

Aufgabe 35
Ein elektromagnetischer Reihenschwingkreis, der durch eine von außen angelegte sinusförmige Wechselspannung $u_a(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$ zu erzwungenen Schwingungen angeregt wird, kann durch die Differentialgleichung

$$L\,\frac{d^2 i}{dt^2} + R\,\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\,i = \frac{du_a}{dt}$$

beschrieben werden. (L: Induktivität, R: Ohmscher Widerstand, C: Kapazität)

Nach Ablauf einer gewissen Einschwingphase ist nur noch die stationäre Lösung

$$i(t) = \hat{i} \cdot \sin(\omega t - \psi)$$

von Bedeutung.

Berechnen Sie den Frequenzgang des Scheitelwertes $\hat{i} = \hat{i}(\omega)$ und der Phasenverschiebung $\psi = \psi(\omega)$. (Verwenden Sie bei den Herleitungen die Abkürzungen $\delta = \frac{R}{2L}$ und $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Stellen Sie $\hat{i}(\omega)$ und $\psi(\omega)$ mit und ohne diese Abkürzungen dar.) Für welchen Wert von ω tritt der Resonanzfall ein?

2.4 Numerisches Lösen von Differentialgleichungen

Aufgabe 36

Zeichnen Sie das Richtungsfeld der Differentialgleichung $y' = y - x$ im Bereich $-3 \leq x \leq 3$ und $-2 \leq y \leq 2$.

Bestimmen Sie die speziellen Lösungen, die auf der y-Achse durch 0, -1 und 1 gehen, und zeichnen Sie diese drei Kurven in die Skizze des Richtungsfeldes ein.

Aufgabe 37

Das Runge-Kutta-Verfahren löst näherungsweise die Anfangswertaufgabe

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0.$$

Wir betrachten den Spezialfall, daß die Funktion f nur von x abhängt, daß also $y' = f(x)$ ist. Dann erhält man y offensichtlich durch Integration von f, und die Lösung der Anfangswertaufgabe lautet: $y(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt +$ Konstante. Gilt ferner $y(x_0) = 0$, so verschwindet die Konstante.

Die Berechnung einer Näherung für $y(x)$ an der Stelle $x = x_0 + h$ entspricht in diesem Spezialfall also einer numerischen Integration. Führen Sie diese Berechnung mit dem Verfahren von Runge-Kutta durch. Welche Formel ergibt sich?

Aufgabe 38

Berechnen Sie näherungsweise die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' = -2xy, \qquad y(1) = e^{-1}$$

im Intervall $[1; 1,2]$.

1. Arbeiten Sie mit dem Verfahren von Euler-Cauchy. Verwenden Sie für eine Grobnäherung die Schrittweite $h = 0,2$ und dann für eine Verbesserung die Schrittweite $h = 0,1$. Führen Sie mit Hilfe der beiden Näherungen eine Fehlerabschätzung an $x = 1,2$ durch.

2. Berechnen Sie die exakte Lösung, und vergleichen Sie den exakten mit dem Näherungswert und den geschätzten mit dem realen Fehler.

3. Berechnen Sie dann noch eine Näherung mit dem Verfahren von Heun und der Schrittweite $h = 0,2$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Näherung durch das Euler-Cauchy-Verfahren und mit dem exakten Wert.

Aufgabe 39
Lösen Sie näherungsweise die Anfangswertaufgabe

$$y' = -\frac{x}{y}\,, \qquad y(0) = 2$$

im Intervall $[0, 1/2]$ mit Hilfe des klassischen Runge-Kutta-Verfahrens 4. Ordnung.

1. Berechnen Sie einen Grobwert mit der Schrittweite $h = 1/2$ und einen Wert mit der Schrittweite $h = 1/4$. Benutzen Sie die beiden Werte, um eine Fehlerabschätzung an $x = 1/2$ durchzuführen.

2. Berechnen Sie die exakte Lösung, und vergleichen Sie den exakten mit dem Näherungswert und den geschätzten mit dem realen Fehler.

Aufgabe 40
Die Dgl. $y' = y^2$ mit $y(0,5) = 2$ hat die Lösung $y = 1/(1-x)$ (nachrechnen!), die bei $x = 1$ einen Pol besitzt. Eine Modifikation der Dgl. ergibt die AWA

$$y' = y^2 - 100e^{-100(x-1)^2} \qquad \text{mit} \qquad y(0,5) = 2.$$

Der zusätzliche Term ist von der Art eines Impulses, d.h. sein Einfluß ist stark, wirkt aber nur in einem kleinen Intervall um den Punkt $x = 1$. (Machen Sie sich das klar!)

Berechnen Sie mit dem Runge-Kutta-Verfahren Näherungslösungen von $x = 0,5$ bis $x = 1,5$. Zeichnen Sie mit diesen Werten die Lösungskurve, indem Sie in sinnvollen x-Abständen Punkte zeichnen und dann verbinden. Wählen Sie die Schrittweite des Verfahrens so, daß Sie die y-Näherungen mit Zeichengenauigkeit erhalten. Betrachten Sie dabei die Stellen der Näherungen als sicher, die sich bei weiterer Verkleinerung (Halbierung) der Schrittweite nicht mehr verändern.

2.5 Systeme von Differentialgleichungen

Aufgabe 41
Lösen Sie mit dem Einsetzverfahren das System von zwei Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} y_1' &= x + y_2 \\ y_2' &= y_1 - 1 \end{aligned}$$

zuerst allgemein und dann mit den Anfangsbedingungen $y_1(0) = y_2(0) = 1$.

Aufgabe 42
Wandeln Sie die Differentialgleichung 2. Ordnung $y'' = 2yy'$ in ein System aus zwei Differentialgleichungen 1. Ordnung um.

Aufgabe 43
Schreiben Sie die AWA

$$y''' = (y' - y)^2 + 4\sqrt{y''} \qquad \text{mit} \qquad y(1) = -2, \quad y'(1) = 0, \quad y''(1) = 7$$

in ein System aus expliziten Differentialgleichungen 1. Ordnung mit den entsprechenden Anfangswerten um.

Aufgabe 44
Es sei das System von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 - k(t\dot{x}_1 - x_2)^2 + 3t &= 0, \\ \ddot{x}_2 + k(t\dot{x}_2 - x_1)^2 - 5t &= 0 \end{aligned}$$

mit den Anfangswerten $x_1(0) = a$, $\dot{x}_1(0) = b$, $x_2(0) = c$ und $\dot{x}_2(0) = d$ gegeben. Formen Sie es in ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung mit den entsprechenden Anfangswerten um.

2.6 Partielle Differentialgleichungen

Aufgabe 45
Für die Temperatur $u(x,t)$ in einem Stab gilt die partielle Differentialgleichung

$$\dot{u} = a \cdot u'' \qquad \text{bzw.} \qquad \partial u/\partial t = a \cdot \partial^2 u/\partial x^2.$$

Hierbei ist a eine Materialkonstante und heißt Temperaturleitfähigkeit.

Zeigen Sie, daß $u = A \cdot \sin(kx) \cdot e^{-k^2 at}$ mit den Konstanten A und k diese Differentialgleichung erfüllt. Wie groß muß die Konstante k sein, damit die Randbedingungen $u(0,t) = 0$ und $u(l,t) = 0$ erfüllt sind (l: Stablänge)?

3 Reihen

3.1 Folgen und Reihen von Zahlen

Aufgabe 46

Die Spanne von 10 bis 100 ist in 4 Intervalle einzuteilen, so daß sich die entstehenden Zahlen verhalten
a) wie eine arithmetische Folge (konstanter Zuwachs),
b) wie eine geometrische Folge (gleicher prozentualer Zuwachs).

Aufgabe 47

Ein Vorrat von 100 kg einer Ware nimmt jeden Monat um je 10% ab. Nach welcher Zeit sind nur noch 10 kg vorhanden?

Aufgabe 48

Untersuchen Sie mit Hilfe des Taschenrechners die Folge $(\sqrt[n]{n})_{n=1}^{\infty}$ im Hinblick auf Konvergenz (Grenzwert) bzw. Divergenz. Welche Vermutung legen die Zahlenwerte nahe?

Aufgabe 49

Bestimmen Sie die Grenzwerte der angegebenen Folgen.

a) $(a_n)_{n=1}^{\infty} \quad \text{mit} \quad a_n = \dfrac{3n^2 - 5n}{n^3 + 2n^2}$

b) $(b_n)_{n=1}^{\infty} \quad \text{mit} \quad b_n = \dfrac{18n^2 + 2}{6n^2 - 7n}$

c) $(c_n)_{n=1}^{\infty} \quad \text{mit} \quad c_n = \dfrac{17n - 4n^2 + 12n^4 + 11}{1 + 22n^2 - 17 - 4n^4}$

Aufgabe 50

100 Widerstände liegen in Reihe. Der erste hat $100\,\Omega$, jeder folgende Widerstand ist jeweils a) um $10\,\Omega$, b) um 10% größer als der vorhergehende. Wie groß ist der letzte Widerstand? Wie groß ist der Gesamtwiderstand?

Aufgabe 51
Berechnen Sie den Grenzwert der Reihe: $1 + 1/4 + 1/16 + 1/64 + 1/256 + \ldots$

Aufgabe 52
Welchen Grenzwert hat die Reihe: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(\sqrt{2})^{k-1}}$?

Aufgabe 53
Berechnen Sie den Grenzwert der Reihe: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-\pi}{\pi^n}$ (π : Kreiszahl).

Aufgabe 54
Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} 1/(n!)$ konvergiert gegen e. Bestimmen Sie mit den Partialsummen $s_m = \sum_{n=0}^{m} 1/(n!)$ Näherungen für e. Berechnen Sie hierzu per Programm s_5, s_{10} und s_{20}.

Aufgabe 55
Stellen Sie zu der Reihe

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - + \cdots$$

die Summenformel auf.

Die Reihe konvergiert gegen den Grenzwert $\pi/4$. Bestimmen Sie durch $4 \cdot s_m$ Näherungen für π, wobei s_m die Partialsumme der ersten m Summanden sei. Berechnen Sie s_{10}, s_{50}, s_{100} und s_{300}. Verwenden Sie ein Programm.

Scheint die vorliegende Reihe geeignet zu sein, um π zu bestimmen?

3.2 Taylorreihen

Aufgabe 56

Die Kurve der Funktion $y = 1/\cos(x)$ soll in der Umgebung von $x = 0$ durch eine Parabel angenähert werden. Berechnen Sie dazu für $y = 1/\cos(x)$ die Taylorreihenentwicklung um den Nullpunkt bis zum x^2–Term.

Aufgabe 57

Berechnen Sie zu $f(x) = \tan x$ die ersten beiden von Null verschiedenen Glieder der Taylorreihenentwicklung um den Nullpunkt. Verwenden Sie dazu die allgemeine Formel der Taylorreihe. Berechnen Sie danach die beiden Glieder erneut, indem Sie eine Polynomdivision mit den ersten Termen der Taylorreihen von $\sin x$ und $\cos x$ durchführen.

Aufgabe 58

Die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ soll in eine Taylorreihe um den Punkt $x = 1$ entwickelt werden. (Berechnen Sie nur die Terme bis x^4.)

Aufgabe 59

Berechnen Sie zu $y = (1+x)^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ die ersten drei Glieder der Taylorreihe mit der Entwicklungsmitte $x = 0$.

Aufgabe 60

Es seien zwei voneinander verschiedene Funktionen f und g gegeben, für die $f(0) = 0$ und $g(0) = 1$ gilt, und deren Ableitungen die Gleichungen $f' = g$ und $g' = f$ erfüllen. (Sie können die folgenden Aufgabenstellungen mit ausschließlich diesen Informationen lösen!)

1. Entwickeln Sie die Funktionen in Taylorreihen mit dem Nullpunkt als Entwicklungsmitte.
2. Finden Sie Darstellungen von f und von g durch elementare Funktionen, indem Sie für f und g jeweils eine Differentialgleichung aufstellen und lösen.
3. Berechnen Sie erneut die Tayloreihen von f und g, indem Sie die gewonnenen Darstellungen durch elementare Funktionen verwenden: Setzen Sie die Taylorreihen der elementaren Funktionen ein, und fassen Sie Terme zusammen, als würden Sie mit Polynomen rechnen.
4. Wie werden die Funktionen f und g üblicherweise bezeichnet?

3.3 Fourierreihen

Aufgabe 61

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei 2π–periodisch mit

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für} \quad x \in [0, \pi), \\ 2\pi - x & \text{für} \quad x \in [\pi, 2\pi). \end{cases}$$

1. Skizzieren Sie die Funktion. Ist sie gerade, ungerade oder weder gerade noch ungerade? Was folgt daraus für die Fourier-Reihe der Funktion?

2. Stellen Sie die Funktion f als Fourier-Reihe in der Form

   $$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

   dar.

3. Schreiben Sie die Fourier-Reihe in die spektrale Darstellung um, und zeichnen Sie das Amplitudenspektrum. Stellen Sie die Fourier-Reihe in der komplexen Schreibweise dar.

Aufgabe 62

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei 2π–periodisch mit

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für} \quad x \in [0, \pi), \\ 0 & \text{für} \quad x \in [\pi, 2\pi). \end{cases}$$

1. Skizzieren Sie die Funktion. Ist sie gerade, ungerade oder weder gerade noch ungerade? Was folgt daraus für die Fourier-Reihe der Funktion?

2. Stellen Sie die Funktion f als Fourier-Reihe in der Form

   $$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

   dar.

3. Skizzieren Sie das Amplitudenspektrum.

Aufgabe 63

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gleich dem Betrag der Sinusfunktion, d.h. $f(x) = |\sin(x)|$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

1. Skizzieren Sie die Funktion. Welche Periode hat sie? Ist sie gerade, ungerade oder weder gerade noch ungerade? Was folgt daraus für die Fourier-Reihe der Funktion?

2. Stellen Sie f als Fourier-Reihe dar, und skizzieren Sie das Amplitudenspektrum.

4 Laplace-Transformation

Aufgabe 64

Wie lauten die Zeitfunktionen zu den folgenden Bildfunktionen?

a) $F(s) = \dfrac{1}{s+2}$ b) $F(s) = \dfrac{24}{s^5}$

Aufgabe 65

Leiten Sie mit Hilfe des Laplace-Integrals die Transformierte der Funktion $f(t) = 2te^{-4t}$ her.

Aufgabe 66

Bestimmen Sie mit Hilfe der Definitionsgleichung der Laplace-Transformation die Bildfunktion der folgenden Originalfunktion (Rechteckimpuls):

$$f(t) = \begin{cases} A & \text{für } 0 < t < a \\ -A & \text{für } a < t < 2a \\ 0 & \text{für } t > 2a \end{cases}$$

(Zeichnen Sie eine Skizze von $f(t)$.)

Aufgabe 67

Bestimmen Sie unter Verwendung geeigneter Rechenregeln die Laplace-Transformierten der folgenden Funktionen:

a) $f(t) = 4t^3 - t^2 + 2t$ b) $f(t) = C(1 - e^{-\lambda t})$

Aufgabe 68
Bestimmen Sie unter Verwendung geeigneter Rechenregeln und der jeweils angegebenen Laplace-Transformierten die Bildfunktionen zu:

a) $f(t) = \cos^2(\omega t), \qquad \mathcal{L}\{\cos^2 t\} = \dfrac{s^2+2}{s(s^2+4)}$

b) $f(t) = e^{t-b}, \qquad \mathcal{L}\{e^t\} = \dfrac{1}{s-1}$

c) $f(t) = \cos^2(t-3), \qquad \mathcal{L}\{\cos^2 t\} = \dfrac{s^2+2}{s(s^2+4)}$

d) $f(t) = A \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega t), \qquad \mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$

Aufgabe 69
Berechnen Sie für die folgende Anfangswertaufgabe die Bildfunktion $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ der Lösung $y(t)$:

$$y'' + 2y' + y = \sin(2t) \qquad \text{mit} \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

Aufgabe 70
Berechnen Sie mit Hilfe des Integralsatzes die Laplace-Transformierten der folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_0^t \cos u \, du \qquad$ b) $\displaystyle\int_0^t u^2 \, du$

Aufgabe 71
Bestimmen Sie die Originalfunktion zu der folgenden Bildfunktion:

$$F(s) = \frac{s+2}{s^2+2s-3}$$

Aufgabe 72
Bestimmen Sie mit Hilfe des Faltungssatzes die Originalfunktion zu der folgenden Bildfunktion:

$$F(s) = \frac{1}{(s-2)(s+4)}$$

Aufgabe 73

Berechnen Sie mit Hilfe des Faltungssatzes die Originalfunktion zu der Laplace-Transformierten (Bildfunktion)

$$F(s) = \frac{1}{s^2(s^2+81)} \; .$$

Verwenden Sie die Korrespondenzen $\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$ und $\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$.
(Alle Integrale sind selbst zu berechnen.)

Aufgabe 74

Berechnen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\dot{u} + u = t \,, \qquad u(0) = 1$$

mit Hilfe der Laplace-Transformation.

Aufgabe 75

Bestimmen Sie die Lösung $y = y(t)$ der Anfangswertaufgabe

$$y'' + y' = e^{-2t} \,, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

mit Hilfe der Laplace-Transformation.

Aufgabe 76

Die folgende Funktion sei periodisch mit der Periode $T = 2a$. Es handelt sich um einen Sinusimpuls (Einweggleichrichtung).

$$f(t) = \begin{cases} A\sin(\frac{\pi}{a}\, t) & \text{für } 0 \le t \le a \\ 0 & \text{für } a \le t \le 2a \end{cases}$$

Zeichnen Sie eine Skizze von $f(t)$. Wie lautet die Laplace-Transformierte der Funktion?