

Komplexe Zahlen 3

Die e -Funktion im Komplexen

- Motivation für die Definition der e -Funktion im Komplexen.
- Definition (e -Funktion im Komplexen)

Zu $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$ setzen wir

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y).$$

- Anmerkung:
 - (a) e^z ist eine Abbildung von \mathbb{C} nach \mathbb{C} . Die reelle e -Funktion ist der Spezialfall mit $y = 0$.
 - (b) Für $x = 0$ gilt speziell

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y.$$

Mit der Definition von e^z

$$\underbrace{e^z}_{=e^{x+iy}} = e^x \underbrace{(\cos y + i \sin y)}_{=e^{iy}}$$

folgt also

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

für alle $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

- Frage: Gilt die charakteristische Eigenschaft $e^{a+b} = e^a e^b$ ($a, b \in \mathbb{R}$) der reellen e -Funktion auch dann noch, wenn a und b komplex sind?
- Satz

Für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}.$$

- Beweis

- Anmerkung: Wir benötigen in dem Beweis die Additionstheoreme für die Sinus- und Cosinusfunktion. Es gilt

$$\begin{aligned}\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \sin(\beta), \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta)\end{aligned}$$

für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- Satz (Eigenschaften der e -Funktion)

Es gilt

- (a) $|e^{i\varphi}| = 1$ für alle $\varphi \in \mathbb{R}$, und $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$ für alle $z \in \mathbb{C}$;
- (b) $e^z \neq 0$ und $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$ für alle $z \in \mathbb{C}$;
- (c) $e^{z+2\pi ik} = e^z$, falls k ganz ist, d.h. e^z ist $2\pi i$ -periodisch.

- Anmerkung: Wegen $|e^{i\varphi}| = 1$ liegen alle Zahlen $e^{i\varphi}$ auf dem Einheitskreis. Speziell ist $i = e^{i\pi/2}$ und $-1 = e^{i\pi}$, und es gilt

$$1 + e^{i\pi} = 0.$$

(Diese Gleichung ist ein heißer Anwärter auf den Titel der schönsten Gleichung der Mathematik; es treten genau die wichtigsten Zahlen und die wichtigsten Operationen auf und sonst nichts.)

- Beweis
- Mit der komplexen e -Funktion wird die trigonometrische Darstellung der komplexen Zahlen umgeschrieben:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi}.$$

- Definition

Zur komplexen Zahl $z \neq 0$ heißt

$$z = re^{i\varphi}$$

die **Exponentialdarstellung** von z .

- Beispiele