

Übungsaufgaben zur Mathematik

Differentialgleichungen numerisch

1. Lösen Sie folgende *DGLn* mit den angegebenen Intervallen und Startwerten *exakt* und *numerisch* nach *EULER-CAUCHY*, *HEUN* und *RUNGE-KUTTA* ($n = 5, 10, 20$). Wie groß ist der *Fehler* am Intervallende?

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} & y'y + x = 0 & [0, 1] & y_0 = 2 \\ \text{(b)} & x^2y' + y = 0 & [1, 2] & y_0 = 5 \\ \text{(c)} & y' + 2y = e^x & [0, 1] & y_0 = 3 \\ \text{(d)} & y'y = x^2 & [0, 1] & y_0 = 1 \end{array}$$

2. Lösen Sie folgende *DGLn* nach *EULER-CAUCHY*, *HEUN* und *RUNGE-KUTTA* ($n = 5, 10, 20$):

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} & x^2y' = \cos(x + y) & [1, 2] & y_0 = 1 \\ \text{(b)} & y' = x \cdot \exp(x^2 - y) & [1, 2] & y_0 = 1 \\ \text{(c)} & y' = xy^2 - x^2 & [0, 1] & y_0 = -1 \\ \text{(d)} & y' = \sqrt{x + y} & [0, 1] & y_0 = 1 \end{array}$$

3. Lösen Sie folgende *DGL-Systeme* auf $[0, 1]$ mit dem Startvektor $\vec{y}(0) = (1, 0, 1)$:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \begin{array}{l} y'_1 = y_2 + 2y_3 \\ y'_2 = -xy_1 + y_2 \\ y'_3 = y_1 + y_2 \end{array} \\ \text{(b)} & \begin{array}{l} y'_1 = y_2 - \sin y_3 \\ y'_2 = -xy_1 + y_3 \\ y'_3 = y_1^2 + y_2^2 \end{array} \end{array}$$

4. Lösen Sie folgende *DGLn* auf $[0, 1]$:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & y''' + 5y'' + 8y' + 6y = 10e^{-x}, \quad y_0 = 2, y'_0 = y''_0 = 0 \\ \text{(b)} & y'' + \frac{1}{10}(1 - y^2)y' + y = 0, \quad y_0 = 1, y'_0 = 0 \\ \text{(c)} & y'' + \frac{1}{5}y' + 10 \sin y = 0, \quad y_0 = 0.3, y'_0 = 0 \end{array}$$

5. Lösen Sie folgende *Randwertaufgaben* mit dem *Differenzen-* und dem *Schießverfahren* ($y(0) = y(1) = 1$; $n = 4, 10$):

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & y'' - 2xy' + e^x y = 1 \\ \text{(b)} & y'' + e^x y' - y = \sin x \end{array}$$

6. Lösen Sie folgende *Randwertaufgaben*:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & y''y = e^{2x} + xe^x \quad y(0) = 1, y(1) = e + 1 \\ \text{(b)} & y'' = xy y' - e^x \quad y(0) = y(1) = 1 \\ \text{(c)} & y'' + x \exp(y') = y^2 \quad y(0) = 0, y(1) = 1 \end{array}$$

Hinweis: Falls nichts anderes angegeben ist, geben Sie bitte die Lösungen mit 3 gesicherten Nachkommastellen an.